கணிதம்-துணைப்பாடம்

(பகுதி II)

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆர். அய்யாசுவாமி

கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு வழங்குநரகம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

க. நூ. வெ. இ. வரிசை எண்—250

கணிதம் - துணைப்பாடம்

(பகுதி II)

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்
திரு. ஆர். அய்யாசுவாமி,
முதல்வர், அரசினர் கலைக்கல்லூரி, சென்னை.

கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகம்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—September, 1970

D.C.P. No. 250

© Directorate of Collegiate Publications

MATHEMATICS ANCILLARY–Vol. II, for B.Sc.

R. AIYASWAMI

Net Price Rs. 5-75
(NO DISCOUNT)

Printed by
Kabeer Printing Works,
Madras-5.

அணிந்துரை

(திரு இரா. நெடுஞ்செழியன், தமிழகக் கல்வி-சுகாதார அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பத்து ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ., வகுப்பு மாண வர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழி லேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகை யில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்ப தற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகம் நூல்களை வெளி யிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான ' கணிதம் – துணைப்பாடம்–பகுதி II ' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்—கல்லூரி நூல் வெளி யீட்டு இயக்குநரகத்தின் 250ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 285 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர் களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித் தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

I. ஆயத்தொலை வடிவ கணிதம் (Analytical Geometry)

1. அறிமுகம் (Introduction) ... 1
2. இரட்டைக் கோடுகள் (Pairs of Straight lines) ... 19
3. வட்டம் (Circle) ... 36
4. ஒருநிலை வட்டங்கள் (System of Circles) ... 56
5. கூம்பின் வெட்டு முகங்கள் (Conic Sections) ... 72
6. நீள்வட்டம் (Ellipse) ... 95
7. அதிபர வளைவு (Hyperbola) ... 128
8. செவ்வக அதிபர வளைவு (Rectangular hyperbola) ... 147

II. கன வடிவ கணிதம் (Solid Geometry)

9. செவ்வக கார்ட்டீசியன் ஆயத் தொலைகளும் திசை கொசைன்களும் (Rectangular Cartesian Co-ordinates and Direction Cosines) ... 155
10. தளம் (Plane) ... 175
11A. நேர்கோடு (The Straight line) ... 186
11B. தளமும் நேர்கோடும் (The Plane and the Straight line) ... 192
12. கோளம் (The Sphere) ... 201

III. திரிகோண கணிதம் (Trigonometry)

13. கோண விகிதச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (Solutions of Simple Trigonometric Equations) ... 215
14. சிக்கலெண்கள் (Complex Numbers) ... 220
15. டிமாவியரின் தேற்றம் (De-Moivre's Theorem) ... 233
16. விரிவுகள் (Expansions) ... 247
17. அதிபர வளைவுச் சார்புகள் (Hyperbolic functions) ... 257

IV. வெக்டர் இயற் கணிதம் (Vector Algebra)

18. வெக்டர் இயற் கணிதம் (Vector Algebra) ... 268
19. இரு வெக்டர்களின் பெருக்கம் (Product of Two Vectors) ... 281
20. இரண்டிற்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களின் பெருக்கம் (Products of more than two Vectors) ... 298
21. வெக்டர் சமன்பாடுகள் (Vector Equations) ... 307

கணிதம் – துணைப்பாடம்

(பகுதி II)

I. ஆயத் தொலைவடிவ கணிதம்
(ANALYTICAL GEOMETRY)

1. அறிமுகம்
(Introduction)

ஆயத்தொலை வடிவ கணிதத்தில் ஆயங்கள் எனக் கூறப்படும் செங்குத்தான இருகோடுகளைக் கொண்டு புள்ளிகளைக் குறிக்கும் முறை ஏற்கனவே மாணவர்கள் அறிந்ததே.

மாணவர்கள் ஏற்கனவே அறிந்த, ஆயத்தொலை வடிவ கணிதத்தின் வளர்ச்சிக்கு ஏதுவான சில அடிப்படை முடிவுகள் இங்கு சிறப்பாகக் குறிப்பிடத் தக்கனவாகும்.

1. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளின் இடைப்பட்ட தொலை

$$AB = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

2. (i) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக்கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\Delta ABC = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, x_1\,(y_2-y_3)$$

(ii) முக்கோணத்தின் உச்சிகள் $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆனால் அதன் பரப்பு $= \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

3. (i) P என்ற புள்ளி $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை அகத்தே $m : n$ தகவுப்படி பிரித்தால் அதன் ஆயத் தொலைகள்

$$x_p = \frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

$$y_p = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

(ii) (x_1, y_1), (x_2, y_2) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப் புள்ளி $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ஆகும்.

(iii) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் புறத்தே Pஇலிருந்து AB-ஐ $m : n$ தகவுப்படி பிரித்தால் P-யின் ஆயத் தொலைகள் $\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$, $\frac{my_2-ny_1}{m-n}$ ஆகும்.

(iv) (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ஆகிய உச்சிகளையுடைய முக் கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் (centroid)

$$\left\{\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right\}$$ ஆகும்.

4. $ax+by+c=0$ சமன்பாடு ஒரு கோட்டினையே குறிக்கும் என நிறுவுதல்.

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) புள்ளிகள் இச்சமன்பாடு குறிப்பிடும் இயங்கு வரையில் உள்ளன எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad ax_1+by_1+c=0$$
$$ax_2+by_2+c=0$$
$$ax_3+by_3+c=0$$

a, b, c-ஐ நீக்கின் $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

அதாவது (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்புச் சுன்னமாகும். ஆகவே இம் மூன்று புள்ளி களும் ஒரே கோட்டில் உள்ளன. இவ்வியங்கு வரையில் மூன்று புள்ளிகள் எடுப்பின் அவை மூன்றும் ஒரே கோட்டில் இருப்பதால், இவ் வியங்குவரை ஒரு கோடேயாகும்.

5. x ஆயத்தோடு கோணம் θ சாய்ந்து y ஆயத்தில் வெட்டுத் துண்டு c உண்டாக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$y=mx+c$ ஆகும்.

m, x ஆயத்தோடு கோடு பிறப்பிக்கும் கோணத்தின் இருக்கையை (tangent)க் குறிக்கும்.

6. (x_1, y_1) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சரிவு m ஆனல் அதன் சமன்பாடு

$y-y_1=m\,(x-x_1)$ ஆகும்.

7. (x_1, y_1), (x_2, y_2) புள்ளிகளின் வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}=\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}$ ஆகும்.

8. x, y ஆயங்களில் முறையே a, b வெட்டுத் துண்டுகளை உண்டாக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ஆகும்.

9. ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$

ஆனல், p = ஆதியிலிருந்து கோட்டிற்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம்.

α = நேர்குத்துக்கோடு x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணம்.

10. ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r$ ஆனல்

θ = x ஆயத்தோடு கோடு பிறப்பிக்கும் கோணம்.

r = கோட்டிலுள்ள $(x_1\; y_1)$ புள்ளியிலிருந்து கோட்டிலுள்ள ஏதாவது ஒரு (x, y) புள்ளியின் இயற்கணித தூரம் (algebraical distance).

11. (i) முறையே m_1, m_2 சரிவுகளையுடைய கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் α ஆனல்,

$$\alpha = \pm\tan^{-1}\left\{\frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}\right\}$$ எனக் காண்பி.

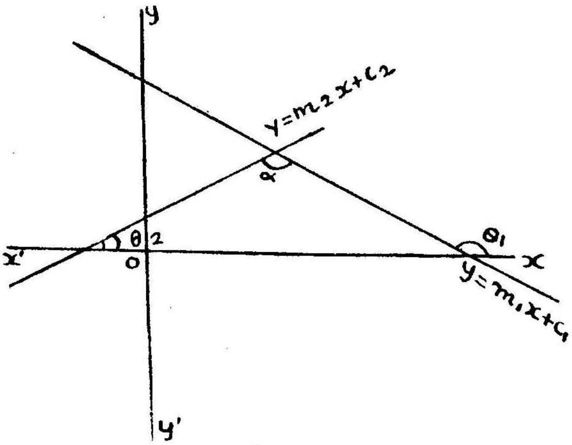
$y = m_1x+c_1$, $y = m_2x+c_2$ கோடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இரண்டு கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் α ஆனல்,

$$\alpha = \theta_1-\theta_2$$

$$\tan\alpha = \tan(\theta_1-\theta_2)$$

$$= \frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$= \frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}$$



படம்–1

$\frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}$ மிகையானல் α கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குறுங் கோணத்தையும், குறையானல் α கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள விரி கோணத்தையும் (obtuse angle) குறிக்கும்.

$$\text{எனவே} \quad \alpha = \pm \tan^{-1}\left(\frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}\right)$$

(ii) இவ்விரு கோடுகள் ஒரு போகாக இருப்பின் $m_1 = m_2$

(iii) இரு கோடுகள் தம்முள் நேர் குத்தாயின் $m_1 m_2 = -1$.

12. மூன்று கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழிச் செல்லுவதற்குரிய விதி.

கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $ax+by+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ எனக் கொள்வோம்.

இம் மூன்று கோடுகளும் ஒரே புள்ளி வழிச் செல்ல மூன்ருவது கோடு முதல் இரண்டு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லுதல் வேண்டும்.

முதல் இரண்டு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$$\left(\frac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b}, \frac{ca_1-c_1a}{ab_1-a_1b}\right)$$

மூன்ருவது கோடு இப்புள்ளி வழிச் செல்லுவதால்

$$a_2 \cdot \frac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b} + b_2 \cdot \frac{ca_1-c_1a}{ab_1-a_1b} + c_2 = 0.$$

(அ - து.) $a_2(bc_1-b_1c)+b_2(ca_1-c_1a)+c_2(ab_1-a_1b)=0$

(அ - து.) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$

x, y-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்.

13. $p(ax+by+c)+q(a_1x+b_1y+c_1)+r(a_2x+b_2y+c_2)\equiv 0$ என்றும், p, q, r என்பவைகளில் ஒன்றும் பூச்சியமல்லாமலும் ஆக p, q, r நிலையெண்கள் காண இயலுமாயின் $ax+by+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ கோடுகள் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லும்.

$ax+by+c=0$ $a_1x+b_1y+c_1=0$ கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளி (x_1y_1) ஆனால்,

$ax_1+by_1+c=0$ $a_1x_1+b_1y_1+c_1=0$ மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லுவதால்,

$a_2x_1+b_2y_1+c_2=0$ என நிறுவ வேண்டும்.

$p(ax+by+c)+q(a_1x+b_1y+c_1)+r(a_2x+b_2y+c_2)=0.$

எல்லா x, y மதிப்புக்களுக்கும் உரியதாதலின்

$p(ax_1+by_1+c)+q(a_1x_1+b_1y_1+c_1)+r(a_2x_1+b_2y_1+c_2)=0$

$ax_1+by_1+c=0$, $a_1x_1+b_1y_1+c_1=0$ ஆதலின்

$r(a_2x_1+b_2y_1+c_2)=0$

ஆகவே $a_2x_1+b_2y_1+c_2=0$

எனவே $a_2x+b_2y+c_2=0$ (x_1y_1) வழிச் செல்லும்.

14. குறித்த இரு கோடுகள் வெட்டுப் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு.

$lx+my+n=0$ $l_1x+m_1y+n_1=0$ குறித்த இரு கோடுகளின் சமன்பாடுகள் எனக் கொள்வோம்.

$(lx+my+n)+\lambda(l_1x+m_1y+n_1)=0$ என்ற சமன்பாட்டினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இது ஒருபடி சமன்பாடு (equation of the first degree). எனவே ஒரு கோட்டினையே குறிக்கும்.

(x_1, y_1) வெட்டுப் புள்ளியானால்,

$lx_1+my_1+n=0$ $l_1x_1+m_1y_1+n_1=0$

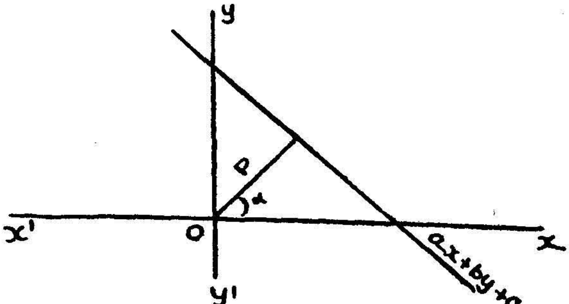
$\therefore$ $lx_1+my_1+n+\lambda(l_1x_1+m_1y_1+n_1)=0$

ஆகவே $(lx+my+n)+\lambda\,(l_1x+m_1y+n_1)=0$

(x_1y_1) வழிச் செல்லும்.

λ-ன் மதிப்புக்களுக்குத் தக (x_1, y_1) வழிச் செல்லும் பல கோடுகள் வரும்.

15. ஆதியிலிருந்து $ax+by+c=0$ கோட்டினுக்கு வரையும் நேர் குத்துக்கோட்டின் நீளம்.



படம்-2

ஆதியிலிருந்து $ax+by+c=0$க்கு வரையும் நேர் குத்துக்கோடு x ஆயத்தோடு கூடிக் கோணம் α-ஐப் பிறப்பிப்பின், அதன் சமன்பாடு

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

இரு சமன்பாடுகளையும் ஒப்பிடின்

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}=-\frac{p}{c}$$ என வரும்.

ஒவ்வொரு தகவையும் k எனக் கொள்ளின்

$$\cos\alpha = ka, \quad \sin\alpha = kb, \quad p = -kc$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1 \quad k^2(a^2+b^2)=1$$

$$\therefore\ k = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

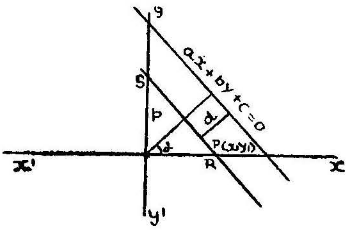
$$p = \mp\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ஆகவே நேர் குத்துக்கோட்டின் நீளம் $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ன் எண் மதிப்பாகும்.

16. $ax+by+c=0$ கோட்டினுக்கு (x_1, y_1)லிருந்து வரையும் நேர் குத்துக்கோட்டின் நீளம்.

(x_1, y_1) புள்ளியை P என்று கொள்வோம்.

இக்கோட்டினை $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ என்ற வகைக்கு மாற்றின்



படம்-3

$$\cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$p = \mp\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

இக்கோட்டிற்கு ஒருபோகாக $P(x_1, y_1)$ வழியே RS வரைக. ஆதியிலிருந்து இக்கோட்டின் தொலை p_1 எனின், இதன் சமன்பாடு $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p_1$. $(x_1\ y_1)$ இக்கோட்டிலிருத்தலின்

$$x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha=p_1$$

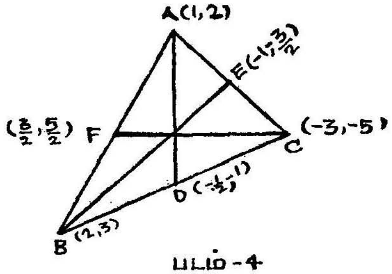
$(x_1\ y_1)$லிருந்து $ax+by+c=0$க்கு வரையும் நேர் குத்துக் கோட்டின் நீளம் d எனக்கொள்ளின்

$$\begin{aligned} d &= p-p_1 \\ &= p-x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha \\ &= \mp\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\mp\frac{x_1 a}{\sqrt{a^2+b^2}}\mp\frac{y_1 b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \mp\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

ஈரடிவகைக் குறியை நீக்கும் வகை: ஆதியிலிருந்தும் (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்தும் ஒரு கோட்டுக்கு வரையும் நேர் குத்துக்கோடுகள் ஒரே போக்குடையனவாக இருப்பின் பின்னது மிகையாகவும் (positive), வேறுபட்ட போக்குடையனவாக இருப்பின், அது குறையாகவும் (negative) கருதப்படும்.

மாதிரி 1: (1, 2), (2, 3), (−3, −5) புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் மையக்கோடுகள் (medians) யாவை?

இம் முக்கோணத்தை ABC எனக்கொள்ளின், அதன் நடுக் கோடுகள் AD, BE, CF. D, E, F முறையே BC, CA, AB-ன் நடுப்புள்ளிகளாகும்.



படம்-4

D-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{2-3}{2}, \frac{-5+3}{2}\right)$

(அ - து.) $(-\frac{1}{2}, -1)$

AD-ன் சமன்பாடு $\frac{x-1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{y-2}{2+1}$

(அ - து.) $2x = y$

E-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{-5+2}{2}\right)$

(அ - து.) $(-1, -\frac{3}{2})$

BE-ன் சமன்பாடு $\frac{x-2}{2+1} = \frac{4-3}{3+\frac{3}{2}}$

(அ - து.) $3x = 2y$

இம்மாதிரியே CF-ன் சமன்பாடு $5x = 3y$

மாதிரி 2 : $3x-5y+11 = 0$க்குச் செங்குத்தாக $5x-6y-1=0$ $3x+2y+5=0$ என்னும் கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

$5x-6y-1=0$, $3x+2y+5=0$ கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$5x-6y-1+k(3x+2y+5)=0.$$

$$x(5+3k)+y(-6+2k)+5k-1=0.$$

இக்கோடு $3x-5y+11=0$க்குச் செங்குத்தாக இருத்தலின் இவ்விரு கோடுகளின் சாய்வு வீதங்களின் பெருக்குத் தொகை -1 ஆகும்.

$$\therefore \quad -\frac{5+3k}{-6+2k} \cdot \frac{3}{5} = -1$$

$$15+9k = 10k-30$$

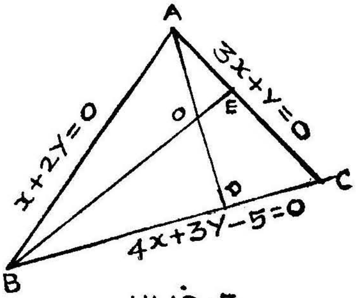
$$\therefore \quad k = 45$$

ஆகவே வேண்டிய கோட்டின் சமன்பாடு

$$140x+84y+224 = 0$$

(அ - து.) $5x+3y+8 = 0.$

மாதிரி 3 : $x+2y=0$, $4x+3y-5=0$, $3x+y=0$ கோடுகளைப் பக்கமாகக்கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையம் (orthocentre) என்ன ?



படம்-5

A, B வழிச்செல்லும் செங்கோடுகள் முறையே AD, BE எனக் கொள்வோம்.

$\left.\begin{array}{l} 3x+y=0 \\ x+2y=0 \end{array}\right\}$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தால், Aயின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும்

Aயின் ஆயத்தொலைகள் (0, 0)

$\left.\begin{array}{l} x+2y=0 \\ 4x+3y-5=0 \end{array}\right\}$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் Bயின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும்.

Bயின் ஆயத்தொலைகள் $(2, -1)$

BCயின் சாய்வு வீதம் $= -\frac{4}{3}$

$\therefore$ ADயின் சாய்வு வீதம் $= \frac{3}{4}$ ($\because$ AD, BCக்குச் செங்குத்தாகும்)

$\therefore$ ADயின் சமன்பாடு $y = \frac{3}{4}x$ (அ - து.) $3x-4y=0.$

ACயின் சாய்வு வீதம் $=-3$

$\therefore$ BCயின் சாய்வு வீதம் $= \frac{1}{3}$

$\therefore$ BEயின் சமன்பாடு $y+1 = \frac{1}{3}(x-2)$

(அ - து.) $x-3y-5 = 0$

AD, BE செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி செங்கோட்டு மையமாகும்.

ஆகவே 0-ன் ஆயத் தொலைகளைக் காண $3x-4y=0$, $x-3y-5=0$ சமன்பாடுகளை விடுவிக்க வேண்டும்.

0-ன் ஆயத்தொலைகள் $(-4, -3)$

பிறிதொரு முறை

ADயின் சமன்பாடு $x+2y+k\,(3x+y) = 0$

$$AD\text{யின் சாய்வு வீதம்} = -\frac{3k+1}{k+2}$$

BCயின் சாய்வு வீதம் $= -\frac{4}{3}$

AD, BCக்குச் செங்குத்தாதலின்

$$\left(-\frac{3k+1}{k+2}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = -1$$

$$12k+4+3k+6=0$$

$$15k+10=0$$

(அ - து.) $k=-\frac{2}{3}$

எனவே ADயின் சமன்பாடு $x+2y-\frac{2}{3}(3x+y)=0$

(அ - து.) $3x-4y=0$

BEயின் சமன்பாடு $4x+3y-5+k(x+2y)=0$

BEயின் சாய்வு வீதம் $=-\frac{k+4}{2k+3}$

ACயின் சாய்வு வீதம் $=-3$

BE, ADக்குச் செங்குத்தாதலின்

$$\left(-\frac{k+4}{2k+3}\right)(-3)=-1$$

$$3k+12+2k+3=0$$

$$5k+15=0$$

$$k=-3$$

எனவே BEயின் சமன்பாடு

$$4x+3y-5-3(x+2y)=0$$

(அ - து.) $x-3y-5=0$

AD, BE செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி செங்குத்துமையம் (ortho centre) ஆகும்.

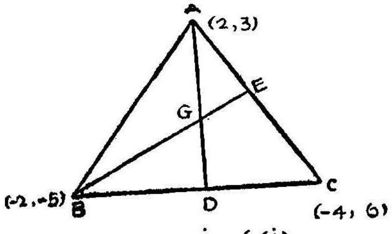
ஆகவே $3x-4y=0$, $x-3y-5=0$ சமன்பாடுகளை விடுவிக்கச் செங்குத்து மையம் $0(-4, -3)$ என அறியலாம்.

மாதிரி 4 : (2, 3), (−2, −5), (−4, 6) புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் (i) திணிவு மையம் (centroid) (ii) உள் மையம் (in-centre) (iii) சுற்று மையம் (circum-centre) ஆகியவைகளைக் காண்க.

$A(2, 3)$, $B(-2, -5)$, $C(-4, 6)$ எனக் கொள்வோம்.

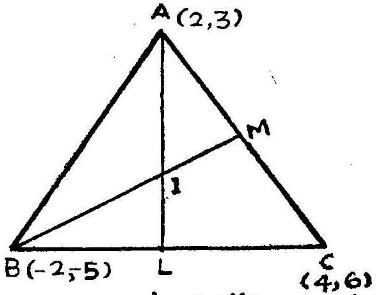
(i) திணிவு மையம் $G\left(\frac{2-2-4}{3}, \frac{3-5+6}{3}\right)$

(அ - து.) $G\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$



படம்-6(i)

(ii) கோணம் A-ன் உள்ளிரு சமவெட்டி (internal bisector) BC-ஐ L புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.



படம்-6(ii)

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\because \; AB^2 = (2+2)^2 + (3+5)^2 = 16 + 64 = 80$$

$$AC^2 = (2+4)^2 + (3-6)^2 = 36 + 9 = 45$$

$$\therefore \; x_2 = \frac{3\times(-2) + 4(-4)}{7} = -\frac{22}{7}$$

$$y_2 = \frac{3(-5) + 4(6)}{7} = \frac{9}{7}$$

AL-ன் சமன்பாடு $\dfrac{x-2}{2+\frac{22}{7}} = \dfrac{y-3}{3-\frac{9}{7}}$

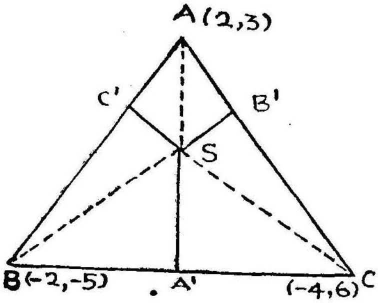
(அ - து.) $x - 3y + 7 = 0$

இம்மாதிரியே கோணம் Bயின் உள்ளிரு சமவெட்டி AC-ஐ M-ல் சந்தித்தால், BM-ன் சமன்பாடு $7x - y + 9 = 0$ எனக் காணலாம்.

$\left.\begin{array}{l} x - 3y + 7 = 0 \\ 7x - y + 9 = 0 \end{array}\right\}$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் உள் மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும்.

உள் மையம் $I\,(-1,\ 2)$

(iii) சுற்று மையம் $S(x, y)$ எனக் கொள்வோம்.



படம்-6 (iii)

$$SA = SB = SC$$
$$SA^2 = (x-2)^2+(y-3)^2$$
$$= x^2+y^2-4x-6y+13$$
$$SB^2 = (x+2)^2+(y+5)^2$$
$$= x^2+y^2+4x+10y+29$$
$$SC^2 = (x+4)^2+(y-6)^2$$
$$= x^2+y+8x-12y+52$$
$$SA^2 = SB^2, \therefore 8x+16y+16=0$$
(அ - து.) $x+2y+2=0$ (1)

$SB^2 = SC^2, \therefore 4x-22y+23=0$ (2)

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவிக்க $x=-3$, $y=\frac{1}{2}$

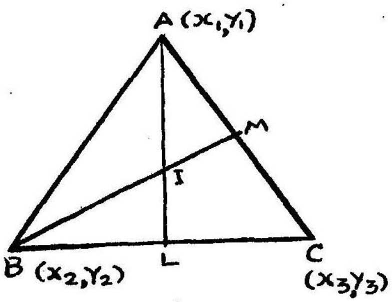
முக்கோணத்தின் சுற்று மையம் $S(-3, \frac{1}{2})$

மாதிரி 5 : $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ என்ற புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் உள் மையத்தின் (in-centre) ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right) \text{ எனக் காண்பி.}$$

$$(BC=a, CA=b, AB=c)$$

முக்கோணம் ABC-யின் உச்சிகள் முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ஆகும்.



படம்-7

கோணம் Aன் உள்ளிரு சமவெட்டி (internal bisector) BCயை L புள்ளியில் சந்திக்கட்டும். கோணம் B-ன் உள்ளிரு சமவெட்டி BM AL-ஐ I-ல் வெட்டட்டும்.

$$\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

L புள்ளி BCயை $c : b$ விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

$\therefore$ L-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left\{\frac{bx_2+cx_3}{b+c}, \frac{by_2+cy_3}{b+c}\right\}$

$$\frac{BL}{BC}=\frac{c}{b+c} \qquad \therefore BL=\frac{c}{b+c}; \qquad BC=\frac{ac}{b+c}$$

$$\frac{AL}{IL}=\frac{AB}{BL}=c\Big/\frac{ac}{b+c}=\frac{b+c}{a}$$

$\therefore$ I-ன் ஆயத்தொலைகள்

$$\left\{\frac{ax_1+(b+c)\dfrac{bx_2+cx_3}{b+c}}{a+b+c}, \quad \frac{ay_1+(b+c)\dfrac{by_2+cy_3}{b+c}}{a+b+c}\right\}$$

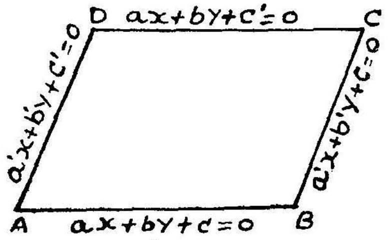
(அ - து.) $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \quad \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

மாதிரி 6 : $ax+by+c=0, \quad a'x+b'y+c'=0$

$ax+by+c'=0, \quad a'x+b'y+c=0$

என்பவைகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட நாற்கரம் ஒரு சாய்வு சதுரமாக அமைவதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையைக் காண்க.

$\left.\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right\}$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் Aயின் ஆயத் தொலைகள் கிடைக்கும்.



படம்-8

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}$$

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\quad y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$$

Aன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\ \frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right)$

$\left.\begin{array}{l}ax+by+c'=0\\a'x+b'y+c=0\end{array}\right\}$ சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் Cயின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும்.

$$\frac{x}{bc-b'c'}=\frac{y}{c'a'-ca}=\frac{1}{ab'-a'b}$$

Cன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{bc-b'c'}{ab'-a'b},\ \frac{c'a'-ca}{ab'-a'b}\right)$

$$AC\text{யின் சாய்வு வீதம்}=\frac{c'a'-ca-ca'+c'a}{bc-b'c'-bc'+b'c}$$

$$=\frac{c'(a+a')-c(a+a')}{b(c-c')+b'(c-c')}$$

$$=\frac{(c'-c)\,(a+a')}{(c-c')\,(b+b')}$$

$$=-\frac{(a+a')}{(b+b')}$$

Bன் ஆயத்தொலைகள் $\left.\begin{array}{l}ax+by+c=0\\a'x+b'y+c=0\end{array}\right\}$ சமன்பாடுகளை விடுவிக்கக் கிடைக்கும்.

Bன் ஆயத்தொலைகள் $\left\{\frac{(b-b')c}{ab'-a'b},\ \frac{(a'-a)c}{ab'-a'b}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}ax+by+c'=0\\a'x+b'y+c'=0\end{array}\right\}$ சமன்பாடுகளை விடுவிக்க Dயின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும்.

Dன் ஆயத்தொலைகள் $\left\{\frac{(b-b')c'}{ab'-a'b}, \frac{(a'-a)c'}{ab'-a'b}\right\}$

BDன் சாய்வு வீதம் $= \frac{(a'-a)(c'-c)}{(b-b')(c'-c)}$

$$= -\left(\frac{a-a'}{b-b'}\right)$$

AB, CD ஒரு போகானவை. BC, AD ஒரு போகானவை. எனவே $ABCD$ நாற்கரம் ஒரு இணைகரமாகும்.

மூலைவிட்டங்கள் AC, BD செங்கோணத்தில் வெட்டிக்கொண்டால் இணைகரம் $ABCD$, சாய்வு சதுரமாகும்.

AC, BD செங்கோணத்தில் வெட்டிக்கொள்ள நிபந்தனை

$$-\left(\frac{a+a'}{b+b'}\right)-\left(\frac{a-a'}{b-b'}\right)=-1$$

(அ - து) $\frac{a^2-a'^2}{b^2-b'^2}=-1$

$$a^2-a'^2=-(b^2-b'^2)$$

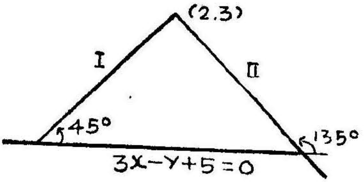
$$a^2+b^2=a'^2+b'^2$$

கொடுத்த பக்கங்களைக் கொண்ட நாற்கரம் சாய்வு சதுரமாக அமைவதற்கு வேண்டிய நிபந்தனை $a^2+b^2=a'^2+b'^2$ ஆகும்.

மாதிரி 7: (2, 3) புள்ளி வழி $3x-y+5=0$ என்ற நேர்கோட்டுடன் 45° பிறப்பிக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு காண்க.

படத்தில் காட்டியுள்ளதுபோல் அத்தகைய நேர்கோடுகள் உண்டு. அத்தகைய நேர்கோட்டின் சாய்வு வீதம் m எனக் கொள்ளின் அதன் சமன்பாடு $y-3=m(n-2)$

$3x-y+5=0$-ன் சாய்வு வீதம் $= 3$.



படம்-9

$$\therefore \tan 45° = \frac{3-m}{1+3m}$$

(அ - து.) $1 = \frac{3-m}{1+3m}$

$$4m = 2, m=\tfrac{1}{2}.$$

முதற்கோட்டின் (I) சமன்பாடு $y-3=\frac{1}{2}(x-2)$

(அ - து.) $x-2y+4=0.$

$$\tan 135^\circ = \frac{3-m}{1+3m} = -1$$

$$3-m = -1-3m$$

$$2m = -4,\ m=-2.$$

இரண்டாவது கோட்டின் (II) சமன்பாடு $y-3=-2(x-2)$

(அ - து.) $2x+y-7=0.$

மாதிரி 8 : $2x-3y+1=0$ கோட்டிற்கு $P(2, 1)$ புள்ளியின் பிம்பத்தை (Image)க் காண்க.

கோட்டிற்கு $P(2, 1)$ புள்ளியின் பிம்பம் $Q(x_1, y_1)$ எனக் கொள்வோம்.

PQன் மத்தியப் புள்ளி $R\left[\frac{x_1+2}{2}, \frac{y_1+1}{2}\right]$ நேர்கோட்டில் அமைய வேண்டும்.

$$\therefore\ (x_1+2)-3\,\frac{(y_1+1)}{2}+1=0$$

$$2x_1-3y_1+3=0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

PQ, $2x-3y+1=0$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகும்.

PQன் சாய்வு வீதம் $= \frac{y_1-1}{x_1-2}.$

$2x-3y+1=0$ கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= \frac{2}{3}$

$$\therefore\ \frac{y_1-1}{x_1-2}\cdot\frac{2}{3} = -1$$

$$3x_1+2y_1-8=0 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ஐ விடுவிக்க

$$x_1 = \frac{18}{13},\ y_1 = \frac{25}{13}$$

P புள்ளியின் பிம்பம் $Q\left(\frac{18}{13}, \frac{25}{13}\right)$

மாதிரி 9 : $4x-3y+20=0$ கோட்டிலிருந்து 5 அலகு தொலைக்கு அப்பால் $y-x-1=0$-ல் இருக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.

அத்தகைய புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

இப்புள்ளி $y-x-1=0$-ல் இருப்பதால்

$$y_1-x_1=1. \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

(x_1, y_1)லிருந்து $4x-3y+20=0$க்கு வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $= \pm \dfrac{4x_1-3y_1+20}{\sqrt{4^2+3^2}}$

இந்த நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $= 5$.

$$\therefore \pm \frac{4x_1-3y_1+20}{5}=5$$

$$4x_1-3y_1=5 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

அல்லது $4x_1-3y_1=-45 \quad \ldots\ldots\ldots(3)$

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $x_1=8$, $y=9$ என்றும், (1), (3) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $x_1=-42$, $y_1=-41$ என்றும் வரும்.

வேண்டிய புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் $(8, 9)$, $(-42, -41)$.

பயிற்சிகள் 1

1. $(-2, 3)$, $(2, -1)$, $(4, 0)$ புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் (i) சுற்று மையம் (circum centre)

(ii) திணிவு மையம் (centroid) ஆகியவைகளைக் கண்டுபிடி.

விடை: சுற்று மையம் $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$
திணிவு மையம் $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$

2. கீழ்வரும் புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் என்ன?

(i) $(1, -2)$, $(3, 1)$, $(-2, 3)$ விடை: $(\frac{37}{19}, \frac{7}{19})$
(ii) $(1, 1)$, $(2, -2)$, $(-1, 0)$ விடை: $(\frac{5}{7}, \frac{4}{7})$
(iii) $(1, 3)$, $(1, 5)$, $(3, 7)$ விடை: $(-3, 7)$

3. $(-4, 3)$, $(2, 0)$, $(-5, 7)$ புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் யாது? விடை: $(\frac{3}{2}, \frac{13}{2})$

4. $3x-4y=0$; $4x+3y-8=0$; $24x-7y-12=0$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் (in-centre) காண்க. விடை: $(1, 1)$.

5. $(1, 2)$, $(2, -3)$, $(-2, 4)$ $(-1, -5)$ புள்ளிகளால் அமைந்த நாற்கரத்தின் பரப்பு என்ன? விடை: 21 சதுர அலகுகள்.

6. $3x-4y+1=0$. $2x-5y-1=0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிவழி ஆயங்களில் சமவெட்டுத் துண்டுகளைப் பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன? விடை : $x+y+2=0$.

7. $8px+(2-3p)y+1=0$, $px+8y+7=0$ கோடுகள் நேர்குத்தாக இருப்பின் p-ன் மதிப்பு என்ன? விடை : $p=1$ அல்லது 2.

8. (2, 3) புள்ளி வழி $x+2y=0$ கோட்டோடு 45° பிறப்பிக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு என்ன? விடை : $x-3y+7=0$, $3x+y-9=0$.

9. (4, 1) புள்ளி வழி x ஆயத்தோடு கூடி 135° பிறப்பிக்கும் கோடு வழி அப்புள்ளியிலிருந்து $3x-y=0$ கோட்டின் தொலை என்ன?

விடை : $r=\dfrac{11\sqrt{2}}{4}$

10. $(x_0\ y_0)$ நிலைப்புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் ஆயங்களிடைப்பட்ட பகுதியின் நடுப்புள்ளியின் இயங்குவரை $\dfrac{x_0}{2x}+\dfrac{y_0}{2y}=1$ என நிறுவுக.

11. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $ax+by+c=0$, $lx+my+n=0$, $px+qy+r=0$ ஆனால்,

$$\frac{ax+by+c}{ap+bq}=\frac{lx+my+n}{lp+mq}$$

என்ற நேர்கோடு முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையத்தின் வழிச் செல்லும் எனக் காண்பி.

12. (5, −2) புள்ளி வழி $3x-4y-7=0$ என்ற நேர் கோட்டுடன் $\tan^{-1}\sqrt{2}$ கோணத்தைப் பிறப்பிக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு காண்க.

விடை : $y+2=\dfrac{3-4\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}(x-5)$

$y+2=\dfrac{3+4\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}(x-5)$

2. இரட்டைக் கோடுகள்

(Pairs of Straight lines)

1. இருபடிச் சமபடித்தான சமன்பாடு (Homogeneous equation of the second degree.)

$ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இருபடிச் சமபடித்தான சமன்பாடு ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$$b \pm 0 \text{ எனின் } = b\left\{y^2+\frac{2h}{b}xy+\frac{a}{b}x^2\right\}$$

$$ax^2+2hxy+by^2 = b\,(y-m_1x)\,(y-m_2x)$$

$$= b\,\{y^2-(m_1+m_2)\,xy+m_1m_2x^2\}$$

$$m_1+m_2 = -\frac{2h}{b},\ m_1m_2=\frac{a}{b}$$

$ax^2+2hxy+by^2=0$ சமன்பாடு $y-m_1x=0$ $y-m_2x=0$ என்ற இரு கோடுகளைக் குறிக்கும். இவ்விரு கோடுகளும் ஆதிவழிச் செல்லுமாகையால் $ax^2+2hxy+by^2=0$ சமன்பாடு ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

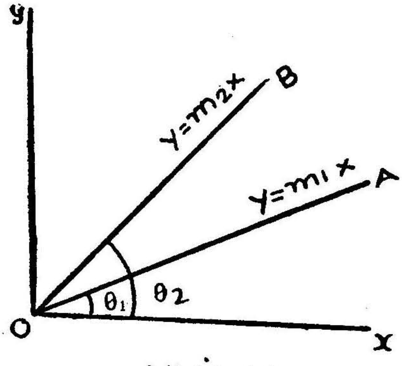
$a=b=0$ ஆனால் $2hxy=0$ $x=0$, $y=0$ என்ற கோடுகளைக் குறிக்கும். அதாவது y, x அயங்களைக் குறிக்கும்.

2. $ax^2+2hxy+by^2=0$ சமன்பாடு குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம்.

$ax^2+2hxy+by^2 \equiv b\,(y-m_1x)\,(y-m_2x)$ எனின்

$$m_1+m_2 = -\frac{2h}{b},\ m_1m_2=\frac{a}{b}.$$

கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடு $y-m_1x=0$, $y-m_2x=0$ ஆகும்.



படம்-10

இக்கோடுகளின் x ஆயத்தோடு θ_1, θ_2 கோணங்களை உண்டாக்கினால், கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் $\theta_2-\theta_1$ ஆகும்.

$$\tan A\hat{O}B = \tan(\theta_1-\theta_2)$$

$$= \frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\,.\,\tan\theta_1} = \frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

$$(m_2-m_1)^2 = (m_2+m_1)^2-4\,m_1m_2$$

$$= \frac{4h^2}{b^2}-\frac{4a}{b} = \frac{4\,(h^2-ab)}{b^2}$$

$$1+m_1m_2 = 1+\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b}$$

$$\tan A\hat{O}B = \pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

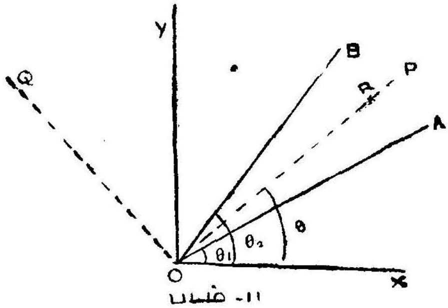
$$A\hat{O}B = \tan^{-1}\left\{\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right\}$$

$A\hat{O}B$ குறுங்கோணமாயின் + குறியும் விரிகோணமாயின் – குறியும் மேற் கொள்ளப்படும்.

துணை முடிவு (i) $h^2=ab$ எனின் $\tan A\hat{O}B=0$. ஆதலின் கோடுகள் பொருந்து கோடுகளாகும் (coincident lines).

(ii) $a+b=0$, $\tan A\hat{O}B=\infty$; $A\hat{O}B=90°$ கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்துக் கோடுகளாகும்.

3. $ax^2+2hxy+by^2=0$ குறிப்பிடும் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு காணுதல்.



படம் -11

கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடு.

$$y-m_1x=0 \longrightarrow OA$$

$$y-m_2x=0 \longrightarrow OB$$

ஆனால் $m_1+m_2=-\frac{2h}{b}$

$$m_1m_2=\frac{a}{b}$$

இக்கோடுகள் x ஆயத்தோடு θ_1, θ_2 கோணங்களை உண்டாக்கினால் $m_1=\tan\theta_1$, $m_3=\tan\theta_2$. OA, OB கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணங்களின் சமவெட்டிகளான OP, OQ x ஆயத்தோடு உண்டாக்கும் கோணத்தை θ எனக் கொள்.

$R\ (x_1\ y_1)$ சமவெட்டியிலுள்ள புள்ளியானால்

$$y_1 = x_1\tan\theta \text{ (ie) } \tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\theta = X\hat{O}P \text{ or } X\hat{O}Q$$

$$= X\hat{O}A+A\hat{O}P \text{ அல்லது } X\hat{O}A+A\hat{O}P+P\hat{O}Q$$

$$= \theta_1+\frac{\theta_2-\theta_1}{2} \text{ அல்லது } \theta_1+\frac{\theta_2-\theta_1}{2}+\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ 2\theta = \theta_1+\theta_2 \text{ or } \theta_1+\theta_2+\pi$$

$$\tan 2\theta = \tan(\theta_1+\theta_2) \text{ அல்லது } \tan(\theta_1+\theta_2+\pi)$$

$$= \tan(\theta_1+\theta_2)$$

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{m_1+m_2}{1-m_1m_2}$$

$$\frac{2\frac{y_1}{x_1}}{1-\frac{y_1^2}{x_1^2}} = \frac{-\frac{2h}{b}}{1-\frac{a}{b}}$$

$$\frac{2x_1\,y_1}{x_1^2-y_1^2} = \frac{2h}{a-b}$$

$$\frac{x_1\,y_1}{h} = \frac{x_1^2-y_1^2}{a-b}$$

R-ன் இயங்கு வரை $\frac{xy}{h} = \frac{x^2-y^2}{a-b}$

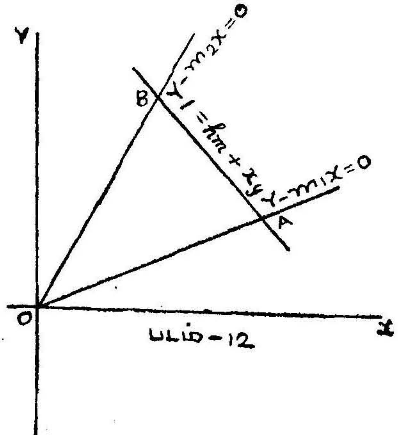
சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு ஆகும்.

மாதிரி 1: $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகள், $lx+my-1=0$ கோடு இவற்றால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{\sqrt{h^2-ab}}{am^2-2hlm+bl^2}$ என்று நிறுவுக.

$ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற சமன்பாடு $y-m_1x=0$ $y-m_2x=0$ என்ற கோடுகளைக் குறித்தால்

$$m_1+m_2= -\frac{2h}{b},\ m_1\,m_2=\frac{a}{b} \text{ ஆகும்.}$$

$lx+my=1$ என்ற கோடு $y-m_1x=0$, $y-m_2x=0$ என்ற கோடுகளை A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், A, B புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்போம்.



படம்–12

$A\ (x_1\ y_1)$, $B\ (x_2\ y_2)$ என்றால்

$$y_1 = m_1 x_1 \quad lx_1 + my_1 = 1 \qquad (1)$$
$$y_2 = m_2 x_2 \quad lx_2 + my_2 = 1 \qquad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1)ஐ விடுக்க வரும் தீர்வுகள்

$$x_1 = \frac{1}{l+mm_1},\ y_1 = \frac{m_1}{l+mm_1} \text{ ஆகும்.}$$

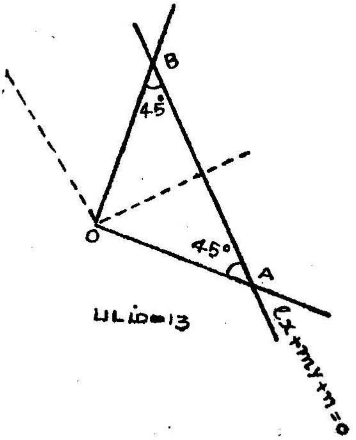
சமன்பாடுகள் (2)ஐ விடுவிக்க வரும் தீர்வுகள்

$$x_2 = \frac{1}{l+mm_2},\ y_2 = \frac{m_2}{l+mm_2} \text{ ஆகும்.}$$

தேவையான முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$= \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{m_2 - m_1}{(l+mm_1)(l+mm_2)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{l^2 + lm(m_1+m_2) + m^2 m_1 m_2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4h^2}{b^2} - 4\frac{a}{b}}}{l^2 - lm\frac{2h}{b} + \frac{a}{b}m^2}$$
$$= \frac{\sqrt{h^2 - ab}}{bl^2 - 2hlm + am^2}$$

மாதிரி 2 : ஆதிவழி $lx + my + n = 0$ என்ற கோட்டோடு கூடி $45°$ பிறப்பிக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு $(l^2 - m^2)(x^2 - y^2) + 4lmxy = 0$ என நிறுவுக.



படம் 13

OA, OB அத்தகைய கோடுகள் என்றும்

AB $lx + my + n = 0$ கோடு என்றும் கொள்க.

$OAB = OBA = 45°$

ஆகையால் $AOB = 90°$

$\therefore$ OA, OBன் சமன்பாட்டை $ax^2 + 2hxy - ay^2 = 0$ என்று கொள்ளலாம்.

AOBன் சமவெட்டிகளில் ஒன்று ABக்கு நேர் குத்தாகவும், மற்றொன்று ABக்கு ஒரு போகாகவும் இருக்கும்.

∴ சமவெட்டிகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$(lx+my)\,(mx-ly)=0$$

(அ - து.) $lm\,(x^2-y^2) = (l^2-m^2)\,xy$

$$\frac{x^2-y^2}{l^2-m^2}=\frac{xy}{lm} \qquad (1)$$

$A\hat{O}B$ன் சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2-y^2}{2a}=\frac{xy}{h} \qquad (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளை ஒப்பிடின்

$$\frac{2a}{h}=\frac{l^2-m^2}{lm}$$

∴ OA, OB கோடுகளின் சமன்பாட்டில் இந்த மதிப்புகளை ஈடாக்கினால் அதன் சமன்பாடு

$(l^2-m^2)\,(x^2-y^2)+4lmxy=0$ ஆகும்.

மாதிரி 3: $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=0$ குறிக்கும் கோடுகளில் இரு கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாக இருப்பின் $a^2+d^2+bd+ac=0$ என நிறுவுக.

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=d\,(y-m_1x)\,(y-m_2x)\,(y-m_3x)$$

எனக்கொள்ளின், கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$y-m_1\,x=0,\quad y-m_2\,x=0,\quad y-m_3\,x=0$

$y=mx$ ஒரு கோடானால்

$$ax^3+bx^2mx+cxm^2x^2+dm^3x^3=0$$

$$dm^3+cm^2+bm+a=0 \qquad (1)$$

m_1, m_2, m_3 சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆனால்

$$m_1, m_2, m_3 = -\frac{a}{d}.$$

இக்கோடுகளில் இருகோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாக இருப்பதால்

$$m_1\,m_2 = -1$$

$$\therefore m_3 = \frac{a}{d}.$$

m_3 சமன்பாடு (1)ன் மூலமாதலால்

$$d\left(\frac{a}{d}\right)^3+c\left(\frac{a}{d}\right)^2+b\left(\frac{a}{d}\right)+a = 0$$

$$a^3+ca^2+bad+ad^2 = 0$$

$$a^2+ca+bd+d^2 = 0.$$

மாதிரி 4 : $ax^2+2hxy+by^2=0$; $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ குறிக்கும் கோடுகளில் ஒருகோடு இரண்டிற்குப் பொதுவாக இருக்கவேண்டுமானால் அதற்குரிய நிபந்தனை யாது?

பொதுக்கோட்டின் சமன்பாடு $y=mx$ எனக் கொள்வோம்.

y-ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்ட இரு சமன்பாடுகளையும் சமன் செய்ய வேண்டும்.

எனவே $ax^2+2hxmx+bm^2x^2 = 0$

(அ-து.) $bm^2+2hm+a = 0$

இதுபோல $b'm^2+2h'm+a' = 0$

$$\therefore \quad \frac{m^2}{2ha'-2h'a} = \frac{m}{ab'-a'b} = \frac{1}{2(bh'-b'h)}$$

$$\therefore \quad m = \frac{ab'-a'b}{2(bh'-b'h)}$$

$$m^2 = \frac{ha'-h'a}{bh'-b'h}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{4}\cdot\frac{(ab'-a'b)^2}{(bh'-b'h)^2} = \frac{ha'-h'a}{bh'-b'h}$$

$\therefore$ வேண்டிய நிபந்தனை :

$$(ab'-a'b)^2 = 4(ha'-h'a)(bh'-b'h)$$

4. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ இரட்டை கோடுகளின் சமன்பாடாக இருப்பின்

$$abc+2fgh+af^2-bg^2-ch^2=0.$$

இச்சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பிடும் என்றும், இக்கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி $P(x_1\ y_1)$ என்றும் கொள்வோம். ஆயங்களின் போக்கினை மாற்றாமல் ஆதியை $P(x_1\ y_1)$ புள்ளிக்கு மாற்றுக.

(x, y) புள்ளியின் ஆயத்தொலை இம்மாற்றத்தால் (X, Y) ஆக மாறின் $x=X+x_1$, $y=Y+y_1$

புதிய ஆயங்களைப் பொறுத்துக் கோடுகளின் சமன்பாடு

$$a(X+x_1)^2+2h(X+x_1)(Y+y_1)+b(Y+y_1)^2+2g(X+x_1)$$
$$+2f(Y+y_1)+c=0 \text{ ஆகும்.}$$

$$ax^2+2hXY+by^2+2(ax_1+hy_1+g)X+2(hx_1+by_1+f)Y$$
$$+ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$

புதிய ஆதிவழி இக்கோடுகள் செல்லுவதால் X, Y-ன் கெழுக்களும் எண்ணுறுப்பும் சூன்னமாக இருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad ax_1+hy_1+g = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$
$$hx_1+by_1+f = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$
$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=x_1(ax_1+hy_1+g)$$
$$+y_1(hx_1+by_1+f)+gx_1+fy_1+c$$
$$\therefore \quad gx_1+fy_1+c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}$$

(i), (ii) சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின்

$$\frac{x_1}{hf-bg}=\frac{y_1}{gh-af}=\frac{1}{ab-h^2}$$
$$\therefore \quad x_1=\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \quad y_1=\frac{gh-af}{ab-h^2}$$

இம்மதிப்புகளை (iii)-ல் பிரதியிட்டால் நாம் பெறுவது

$$g\cdot\frac{hf-bg}{ab-h^2}+f\frac{gh-af}{ab-h^2}+c=0$$

(அ-து.) $g(hf-bg)+f(gh-af)+c(ab-h^2)=0$

(அ-து.) $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$

பொதுப்படை இருபடிச் சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பிடின் இக்கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி

$$\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \frac{gh-af}{ab-h^2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $ab=h^2$ என்றிருப்பின் வெட்டும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் எண்ணிலியாகும். இந்நிலையில் கோடுகள் ஒரு போகானவை யாகும்.

பிறிதொரு முறை

$lx+my+n=0$, $l'x+m'y+n'=0$ தனித்தனி கோடுகளைக் குறிப்பிடின்

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$
$$\equiv (lx+my+n)(l'x+m'y+n').$$

கெழுக்களையும் எண்ணுறுப்புகளையும் இருபுறத்தும் ஒப்பிடின்

$$ll'=a,\ mm'=b,\ l'm+lm'=2h$$
$$nl'+n'l=2g,\ mn'+m'n=2f,\ nn'=c$$

$$\begin{vmatrix} l & l' & 0 \\ m & m' & 0 \\ n & n' & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l' & m' & n' \\ l & m & n \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2ll' & lm'+l'm & ln'+l'n \\ l'm+lm' & 2mm' & mn'+m'n \\ nl'+n'l & mn'+m'n & 2nn' \end{vmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2a & 2h & 2g \\ 2h & 2b & 2f \\ 2g & 2f & 2c \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

(அ - து.) $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

4-ன் மறுதலை

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ ஆனால்

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ இருகோடுகளைக் குறிக்கும்.

case i : $a \neq 0$

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$.........(1)

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$......(2)

(1)-ஐ $-a$-ஆல் பெருக்கி h^2g^2ஐ கூட்டிக் கழித்தால்

$(gh-af)^2-(h^2-ab)(g^2-ac)=0$......(3) ஆகும்.

(2)-ஐ a-ஆல் பெருக்கினால்

$$a^2x^2+2haxy+aby^2+2gax+2fay+ca=0$$
$$a^2x^2+2a(hy+g)x+a(by^2+2fy+c)=0$$

(அ - து.) $\{a^2x^2+2a(hy+g)x+(hy+g)^2\}$

$$-\{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)\}=0$$
$$(ax+hy+g)^2-\{(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)\}=0 \qquad \text{.........(4)}$$

இரண்டாவது அடைப்பிலுள்ள கோவை y-ன் ஓர் இருபடிக் கோவை. மேலும் சமன்பாடு (3)-ன்படி அதன் தன்மைகாட்டி (Discriminant) சூன்னமாதலால் அதனை $(py+q)^2$ என எழுதலாம். எனவே சமன்பாடு (4)

$(ax+hy+g)^2-(py+q)^2=0$ என்றமையும்.

(அ - து.) $\{ax+hy+g-py-q\}\ \{ax+hy+g+py+q\}=0$

(அ - து.) $\{ax+(h-p)y+(g-q)\}\ \{ax+(h+p)y+(g+q)\}=0$

இது இரண்டு கோடுகளைக் குறிக்கும் சமன்பாடாகிறது.

case ii : $a=0$, $b\neq 0$. case (i)ஐப் போலவே $-a$க்குப் பதில் $-b$ஆல் பெருக்கி அதே வழியில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இரு கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டலாம்.

case iii : $a=0$, $b=0$ ஆனால் $h\neq 0$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0 \text{ சமன்பாடு}$$

$$2fgh-ch^2=0 \text{ என ஆகும்.}$$

$$2fg-ch=0$$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

$$2hxy+2gx+2fy+c=0 \text{ என ஆகும்.}$$

இதை 'h'ஆல் பெருக்கினால்

$$2h^2xy+2hgx+2fhy+ch=0$$

(அ - து.) $h^2xy+hgx+hfy+fg=0 \quad \{\because\ ch=2fg\}$

(அ - து.) $(hx+f)\ (hy+g)=0$

∴ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$hx+f=0$$

$$hy+g=0 \text{ என்ற கோடுகளைக் குறிக்கும்.}$$

5. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பின் $ax^2+2hxy+by^2=0$ ஆதிவழி இக்கோடுகளுக்கு ஒரு போகான கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ குறிக்கும் கோடுகள் $lx+my+n=0$, $l'x+m'y+n'=0$ ஆனால்

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c\equiv(lx+my+n)\ (l'x+m'y+n')$$

$$ll'=a, \quad mm'=b, \quad lm'+l'm=2h$$

ஆதிவழி $lx+my+n=0$, $l'x+m'y+n'=0$ கோடுகளுக்கு ஒரு போகான கோடுகளின் சமன்பாடு $lx+my=0$, $l'x+m'y=0$ ஆகும்.

இக்கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$(lx+my)\ (l'x+m'y)=0$$

$$ll'x^2+(lm'+l'm)xy+mm'y^2=0$$

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

6. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பின், கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்திற்குச் சமம்.

∴ கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம்

$$= \tan^{-1}\left\{\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right\}$$

$h^2=ab$ ஆனல் கோடுகள் ஒரு போகானவை.

$a+b=0$ ஆனல் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாக இருக்கும்.

ஆகவே ஒரு சமன்பாடு குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் தம்முள் நேர்குத்தாவதற்குரிய கட்டுப்பாடு x^2, y^2 இவற்றின் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை சுன்னமாகும்.

$abc+2fgh-af^2-bg^2+ch^2=0$ என்ற கட்டுப்பாடு இல்லையெனின் $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற சமன்பாடு வட்டம், கூம்பு வெட்டி போன்ற ஒரு வளைவரையைக் குறிக்கும்.

7. $lx+my=1$ என்றகோடு $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ வளைவரையை A, B புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. O ஆதியாஞல் OA, OB கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு காணுதல்.

$an^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ சமன்பாட்டினை $lx+my=1$ சமன்பாட்டால் சமபடித்தான சமன்பாடு ஆக்கின்

$ax^2+2hxy+by^2+(2gx+2fy)(lx+my)+(lx+my)^2c=0$ என்று வரும். இது ஆதிவழி செல்லும் இருகோடுகளைக் குறிக்கும். மேலும் $lx+my=1$, $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ சமன்பாடுகளில் பொருந்தும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் இச்சமன்பாட்டிலும் பொருந்தும். ஆகவே இச்சமன்பாடு OA, OB கோடுகளைக் குறிக்கும்.

மாதிரி 5 : $6x^2-5xy-4y^2-2x+21y+k=0$ சமன்பாடு k-ன் எம் மதிப்புக்கு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும்? இக்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியையும், கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தையும் காண்க.

$$6x^2-5xy-4y^2 = (3x-4y)(2x+y)$$

$$6x^2-5xy-4y^2-2x+21y+k$$

$$\equiv (3x-4y+A)(2x+y+B)$$ எனக் கொள்வோம்.

x, y கெழுக்களையும் எண்ணுறுப்புகளையும் இருபுறத்தும் ஒப்பிடின்

$$2A+3B = -2$$
$$A-4B = +21$$

இச்சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின் $A=5$, $B=-4$

$$\therefore\ k=AB = -20.$$

இச்சமன்பாடு குறிக்கும் கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடு $3x-4y+5=0$, $2x+y-4=0$. இச்சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின் $x=1$, $y=2$. கோடுகள் (1, 2) புள்ளியில் வெட்டும். கோடுகளின் இடைப் பட்ட கோணம்

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right\}$$
$$= \tan^{-1}\left\{\frac{2\sqrt{\frac{25}{4}+24}}{6-4}\right\}$$
$$= \tan^{-1}\left(\tfrac{11}{2}\right).$$

மாதிரி 6: $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ஆதியிலிருந்து சமதொலைவிலிருக்கும் இரட்டைக் கோடுகளாயின் $f^4-g^4=c\,(bf^2-ag^2)$ என்று நிறுவுக.

அக்கோடுகள் $lx+my+n=0$, $l'x+m'y+n'=0$ என்று கொள் வோம்.

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c\equiv(lx+my+n)(l'x+m'y+n').$$
$$\therefore\ ll'=a,\ mm'=b,\ lm'+l'm=2h,\ ln'+l'n=2g$$
$$mn'+m'n=2f,\ nn'=c.$$

ஆதியிலிருந்து இக்கோடுகளுக்கு வரையும் தொலைகள்

$$\pm\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2}},\quad \pm\frac{n'}{\sqrt{l'^2+m'^2}}$$
$$\therefore\ \frac{n^2}{l^2+m^2}=\frac{n'^2}{l'^2+m'^2}$$

(அ-து.) $n^2(l'^2+m'^2) = n'^2(l^2+m^2)$

,, $n^2l'^2-n'^2l^2 = m^2n'^2-m'^2n^2$

,, $(nl'+n'l)\,(nl'-n'l) = (mn'+m'n)\,(mn'-m'n)$

,, $2g(nl'-n'l) = 2f\,(mn'-m'n)$

(அ - து) $g^2\{(nl'+n'l)^2-4ll'nn'\}=f^2\{(mn'+m'n)^2-4mm'n'n\}$

,, $g^2(4g^2-4ac) = f^2(4f^2-4bc)$

,, $g^4-acg^2 = f^4-bcf^2$

,, $f^4-g^4 = c(bf^2-ag^2)$

மாதிரி 7: $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ பொதுப்படை இருபடிச் சமன்பாடு இரண்டு ஒரு போகான கோடுகளைக் குறிப்பிடின் $\frac{a}{h}=\frac{h}{b}=\frac{g}{f}$ என்றும் அக்கோடுகளின் இடைப்பட்ட தொலை $2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$ என்றும் நிறுவுக.

கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$.

கோடுகள் ஒருபோகானவையாயின் $h^2=ab$ ஆகும்.

(அ - து.) $\frac{a}{h}=\frac{h}{b}$ (i)

சமன்பாடு இருகோடுகளைக் குறிப்பதால்

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

abக்குப் பதில் h^2ஐ சுடாக்கின் $ch^2+2fgh-af^2-bg^2-ch=0$

$2fgh-af^2-bg^2=0$

$af^2+bg^2-2fgh=0$

bஆல் பெருக்கினால் $abf^2+b^2g^2-2bgfh=0$

$h^2f^2+b^2g^2-2bgfh=0$

$(hf-bg)^2=0$

$bg=hf$ (அ - து) $\frac{g}{f}=\frac{h}{b}$ (ii)

(i), (ii) லிருந்து $\frac{a}{h}=\frac{h}{b}=\frac{g}{f}$

பொதுப்படை இருபடிச் சமன்பாடு குறிக்கும் ஒரு போகான கோடுகள் $lx+my+n=0$, $lx+my+n_1=0$ எனக் கொள்வோம்.

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=(lx+my+n)\quad(lx+my+n_1)$

$a=l^2,\ b=m^2,\ h=lm,\ 2g=l(n+n_1),\ 2f=(n+n_1)m,\ c=nn_1$

கோடுகளின் இடைப்பட்ட தொலை $d=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2}}\sim\frac{n_1}{\sqrt{l^2+m^2}}$

$$\therefore\ d^2 = \frac{(n-n_1)^2}{l^2+m^2} = \frac{(n+n_1)^2-4nn_1}{l^2+m^2}$$

$$= \frac{\frac{4g^2}{l^2}-4c}{a+b} = \frac{4\left(\frac{g^2}{a}-c\right)}{a+b}$$

$$= \frac{4\,(g^2-ac)}{a\,(a+b)}$$

$$\therefore\ d = 2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$$

மாதிரி 8 : $3x^2+5xy-3y^2+2x+3y=0$, $3x-2y=1$ இவற்றின் பொதுப் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்க வரும் கோடுகள் தம்முள் நேர் குத்தாக உள என நிறுவுக.

$3x^2+5xy-3y^2+2x+3y=0$ சமன்பாட்டினை $3x-2y=1$ சமன் பாட்டால் சமபடித்தான சமன்பாடு ஆக்கின்.

$$3x^2+5xy-3y^2+(2x+3y)\,(3x-2y)=0$$

இச்சமன்பாடு பொதுப் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்கும் கோடு களைக் குறிக்கும்.

x^2, y^2 கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= 3-3+6-6=0$$

ஆதலால் $3x^2+5xy-3y^2+2x+3y=0$, $3x-2y=1$ இவற்றின் பொதுப் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்க வரும் கோடுகள் தம்முள் நேர் குத்தாக உள்ளது.

பயிற்சிகள் 2

1. $ax^2+2h\,(a+b)\,xy+b^2y^2=0$ கோடுகள் $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகளோடு சமச் சாய்வுடையதாக இருக்கும் என நிறுவுக.

2. $ax^2+hxy+by^2=0$ கோடுகளில் ஒன்றின் சாய்வு வீதம் மற்றொன்றின் சாய்வு வீதத்தின் இரு மடங்காக இருப்பின் $8h^2=9ab$ எனக் காண்பி.

3. $(x_1\ y_1)$ லிருந்து $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகளுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத் தொகை $\dfrac{ax_1^2+2hx_1\,y_1+by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$ என நிறுவுக.

4. $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகளுக்கு ஆதிவழி நேர்குத்தாக வரையும் கோடுகளின் சமன்பாடு $bx^2-2hxy+ay^2=0$ என நிறுவுக.

5. $ax^2+2hxy+by^2=0$, $y=x+c$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு $\dfrac{c^2\sqrt{h^2-ab}}{a+b+2h}$ என நிறுவுக.

6. $12x^2-20xy+7y^2=0$, $2x-3y+4=0$ கோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்து நடுக்கோட்டு மையத்தின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

7. $2x^2+3xy-2y^2=0$, $2x^2+3xy-2y^2+3x+y+1=0$ இந் நாற்கோடுகள் ஒரு சதுரத்தின் பக்கங்கள் எனக் காண்பி.

8. ஒரு இணைகரத்தின் இருபக்கங்கள் $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகளாகவும், ஒரு மூலை விட்டம் $lx+my=1$ கோடாகவும் இருப்பின் அதன் மற்றொரு மூலை விட்டத்தின் சமன்பாடு $y(bl-hm)=x(am-hl)$ என்றும், அதன் பரப்பு $2\sqrt{h^2-ab}/(bl^2-2hlm+am^2)$ என்றும் காண்பி.

9. $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகளில் ஒன்று $a^1x^2+2h^1xy+b^1y^2=0$ கோடுகளில் ஒன்றுக்கு நேர்குத்தாக இருப்பின் $(aa^1-bb^1)^2+4(h^1b+ha^1)(hb^1+h^1a)=0$ என நிறுவுக.

10. $px+qy+r=0$ நேர்கோடு $(px+qy)^2-3(qx-py)^2=0$ கோடுகளுடன் $\dfrac{r^2}{\sqrt{3}(p^2+q^2)}$ பரப்புள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை ஏற்படுத்தும் எனக் காண்பி.

11. $m(x^3-3xy^2)+(y^3-3x^2y)=0$ சமன்பாடு ஒன்றுக்கொன்று சம சாய்வுள்ள மூன்று கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறுவுக.

12. $y^3-x^3+3xy(y-x)=0$ சமன்பாடு தம்முள் சமச்சாய்வு உடைய மூன்று கோடுகளைக் குறிக்குமென நிறுவுக.

13. $(a-b)(x^2-y^2)+4hxy=0$ கோடுகள் $h(x^2-y^2)=(a-b)xy$ கோடுகள் இவை தம்முள் ஒன்று மற்றொன்றின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் சமவெட்டிகளாகும் என நிறுவுக.

14. $(a+2hm+bm^2)x^2+2\{(b-a)m-(m^2-1)h\}xy+(am^2-2hm+b)y^2=0$ கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் mன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் மாறாத்தன்மையது என நிறுவுக.

15. $ax^2+2hxy+by^2=\lambda(x^2+y^2)$ கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் சமவெட்டிகள் λன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் மாறாத் தன்மையது என நிறுவுக.

16. $lx+my=n$ நேர்கோடு $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகளை A, B புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. O-ஆதியும், OAB ஒரு சமபக்க முக்கோணமுமானால்

(i) $4(h^2-ab)=3(a+b)^2$

(ii) $lm(a-b)=h(l^2-m^2)$ எனக் காண்பி.

பயிற்சிகள் 3

1. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ சமன்பாடு குறிப்பிடும் கோடுகள் y ஆயத்தில் வெட்டின் $2fgh-by^2-ch^2=0$ என்றும் x ஆயத்தில் வெட்டின் $af^2+ch^2=2fgh$ என்றும் நிறுவுக.

2. $12x^2+7xy+ky^2+13x-y+3=0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பின் k-ன் மதிப்பையும், இக்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியையும், கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தையும் காண்க.

விடை: $k=-10$, $\theta=\tan^{-1}\dfrac{23}{2}$

$\left(-\dfrac{11}{23}, -\dfrac{5}{23}\right)$

3. $x^2+3xy+y^2-7x-3y+1=0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. (1, 2) வழி இவற்றிற்கு ஒரு போகான கோடுகளின் சமன்பாடு என்ன?

விடை: $x^2+3xy+y^2-8x-7y+11=0$.

4. $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-3x-3\sqrt{3}y-4=0$ சமன்பாடு ஒரு போகு இரு கோடுகளைக் குறிப்பிடும் என நிறுவுக. இக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட தொலை என்ன? விடை: $\dfrac{5}{2}$

5. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ சமன்பாடு (x_1, y_1)-ல் வெட்டும் இரு கோடுகளைக் குறிப்பின் இக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் சமவெட்டிகள் $\dfrac{(x-x_1)^2-(y-y_1)^2}{a-b}=\dfrac{(x-x_1)\ (y-y_1)}{h}$ என நிறுவுக.

6. ஆதி, $2x^2+5xy-3y^2+3x-5y-2=0$ இக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி, இக் கோடுகளை $3x-5y=2$ கோடு வெட்டும் புள்ளிகள் என்ற இந்நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு இணைகரத்தின் முனைகளாகும் என நிறுவுக.

7. $y=mx+c$ கோடு $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்கவரும் கோடுகள் தம்முள் நேர் குத்தாயின் $2c^2=a^2(1+m^2)$ என நிறுவுக.

8. $y=2x+1$ கோடு $x^2-3xy+2y^2-4x-3y+1=0$ வளை வரையுடன் வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்கவரும் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க. விடை: $\pm \tan^{-1}\frac{5}{13}$

9. $3x^2-xy+3y^2+2x-3y+4=0$, $2x+3y=\lambda$ இவற்றின் பொதுப் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்கும் கோடுகள் தம்முள் நேர் குத்தாக இருப்பின் $6\lambda^2-5\lambda+52=0$ என நிறுவுக.

10. $6x-y+8=0$ கோடு $3x^2+4xy-4y^2-11x+2y+6=0$ கோடுகளை வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்கும் கோடுகள் ஆயங்களோடு சமச் சாய்வு உடையதாக இருக்குமென நிறுவுக.

11. $6x^2+xy-12y^2-14x+47y-40=0$

$14x^2+xy-4y^2-30x+15y=0$ இவை ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லும் கோடுகள் எனவும், முதல் சமன்பாடு குறிக்கும் கோடுகள், இரண்டாவது சமன்பாடு குறிக்கும் கோடுகளுடன் சமச் சாய்வுடையன என்றும் நிறுவுக.

12. $x+2y-5=0$ கோடு, $2x^2-7xy+3y^2+5x+10y-25=0$ கோடுகளை வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியோடு இணைக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு என்ன? இந்த நான்கு கோடுகளால் அமையும் நாற்கரம் இரு இணைகரம் என நிறுவுக.

13. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பிடின் இவை வெட்டும் புள்ளிக்கும் ஆதிக்கும் இடைப்பட்ட தொலையின் இருபடி $\frac{c(a+b)-f^2-g^2}{ab-h^2}$ என நிறுவுக.

14. $(ab-h^2)(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy)+af^2+bg^2-2fgh=0$ சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் எனவும், இக்கோடுகள், $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகள் இவற்றால் அமையும் நாற்கரம் ஒரு சாய்வு சதுரமாயிருப்பதற்குரிய நிபந்தனை யாது?

விடை: $(a-b)fg+h(f^2-g^2)=0$

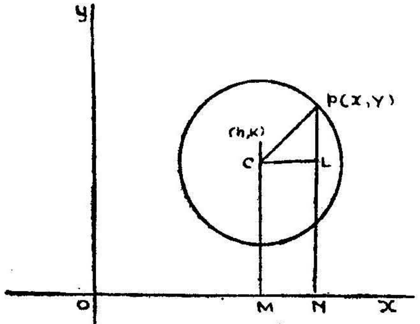
15. $2l$ நீளமுடைய ஒரு கோட்டின் இரு முனைகள் தனித்தனி $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் இருப்பின், கோட்டின் நடுப் புள்ளியின் இயங்குவரை $(ax+hy)^2+(hx+by)^2+(ab-h^2)l^2=0$ என நிறுவுக.

3. வட்டம்
(Circle)

1. வரையறை : நிலைப்புள்ளி ஒன்றிலிருந்து மாறாத தொலை யுடைய · ஒரு புள்ளியின் இயங்குவரை வட்டமாகும். நிலைப்புள்ளி வட்டத்தின் மையம். மாறாத தொலை வட்டத்தின் ஆரம்.

2. வட்டத்தின் சமன்பாடு : ஆயங்கள் ox, oy கோடுகள், வட்டத்தின் மையம் C, வட்டத்தின் ஆரம் 'r' ஆகக் கொள்க.

வட்ட வரையில் $P\ (x,\ y)$ எனக் கொள்க.



படம் -14

Ox-க்கு CM, PN கோடுகளை நேர் குத்தாகவும் NP-க்கு CL-ஐ நேர் குத்தாகவும் வரைக.

C-யின் ஆயத் தொலைகளை $(h,\ k)$ எனக் கொள்வோம்.

$$CL = x - h,\quad LP = y - k$$

CLP முக்கோணத்தில் $CL^2 + LP^2 = CP^2$

$$\therefore\quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

குறிப்பு: 'a' வட்டத்தின் ஆரையாகவும் ஆதி மையமாகவும் இருப்பின் அதன் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$ ஆகும்.

3. வட்டத்தின் பொதுப்படைச் சமன்பாடு:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

இங்கு $-2h$, $-2k$, $h^2+k^2-r^2$ இவற்றிற்குப் பதில் $2g$, $2f$, c-ஐ எழுதின் வட்டத்தின் சமன்பாடாக $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ வரும்.

இச்சமன்பாட்டில் x^2, y^2 இவற்றின் கெழுக்கள் சமமாகும். xy-ன் கெழு சுன்னம்.

ஆகவே இருபடிப் பொதுப்படை சமன்பாடு அதாவது $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ஒரு வட்டத்தைக் குறிப்பின் $a=b$, $h=0$

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ சமன்பாடு g, f, c-ன் அனைத்து மதிப்பிற்கும் ஒரு வட்டத்தினைக் குறிக்கும்.

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c$$

$$(x+g)^2+(y+f)^2=\{\sqrt{g^2+f^2-c}\}^2$$

இச்சமன்பாட்டை முற்பகுதிச் சமன்பாட்டோடு ஒப்பிடின்

$$h=-g, \quad k=-f, \quad r=\sqrt{g^2+f^2-c}$$

ஆகவே இச்சமன்பாடு $(-g, -f)$-ஐ மையமாகவும் $\sqrt{g^2+f^2-c}$-ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தினைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு: $a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$ வட்டத்தின் மையம்

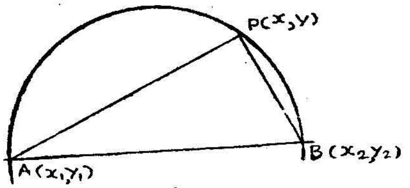
$$\left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right)$$

$$\text{ஆரை} = \sqrt{\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}}$$

$g^2+f^2>c$ என்றிருந்தால்தான் ஆரைக்கு மெய்மதிப்பு வரும். $g^2+f^2=c$ என்றால் ஆரை சுன்னமாகும். அந்நிலையில் இவ்வட்டம் $(-g, -f)$ புள்ளியோடு ஒன்றுபடும். இதற்குப் புள்ளி வட்டம் என்று பெயர். $g^2+f^2<c$ எனின் ஆரையின் மதிப்பு கற்பனையாகும். அந்நிலையில் இது $(-g, -f)$ மையத்து மெய்ப்புள்ளியுடைய கற்பனை வட்டமாகும்.

4. $A(x_1\ y_1)$, $B(x_2\ y_2)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு.

A, B-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் $P(x,\ y)$ என்று கொள்வோம்.



படம்-15

APB அரைவட்டமாதலின் $A\hat{P}B=90°$. ஆகவே இவ்விரு கோட்டு 'm'களின் பெருக்குத்தொகை $= -1$

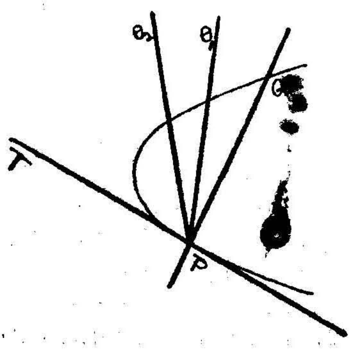
$$PA\text{யின் சாய்வு வீதம் } 'm' = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$PB\text{யின் சாய்வு வீதம் } 'm' = \frac{y-y_2}{x-x_2}$$

$$\therefore\ \frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

$$\therefore\ (x-x_1)\ (x-x_2)+(y-y_1)\ (y-y_2)=0$$

இது $A\hat{P}B=90°$ஆக இருக்க P-ன் இயங்குவரைச் சமன்பாடாகும். ஆகவே இச்சமன்பாடு AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தினைக் குறிக்கும்.



படம்-16

5. தொடுகோடு (Tangent) : $y=f(x)$ வரைவரையில் P, Q நெருங்கிய புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம். P, நிலைப்புள்ளியாக P-ஐ Q நெருங்கி முடிவாக P ஒடு ஒன்றுபடின் PQ நாண் P இடத்து PT தொடுகோடாகும்.

6. குறியீட்டு முறை (Notation) :

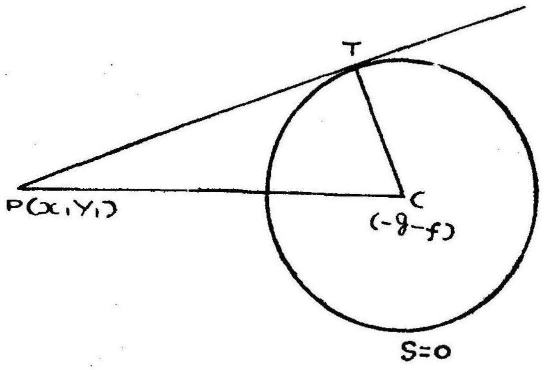
$S \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ஆனால்

$S_1 \equiv ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$

$T \equiv axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

எனக் கொள்வோம்.

7. $S=x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$. வட்டத்திற்கு $P(x_1\ y_1)$ வெளிப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம்.



படம் - 17

மையப்புள்ளி $C(-g, -f)$. PT என்பது Pயிலிருந்து வரையப் படும் தொடுகோடு.

$$P\hat{T}C = 90^\circ$$

$$\therefore PT^2 = PC^2 - CT^2$$

$$= (x_1+g)^2+(y_1+f)^2-(g^2+f^2-c)$$

$$= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$

$$= S_1$$

$$PT = \sqrt{S_1}$$

(x_1, y_1) வெளிப்புள்ளியிலிருந்து $S=0$ வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் $\sqrt{S_1}$.

$PT^2=S_1$, $S=0$ வட்டத்திற்கு $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் படியாகும் (power).

வட்டத்தின் வெளியே P இருப்பின் PTக்கு மெய்மதிப்பு வரும். ஆகவே PT^2-ன் மதிப்பு மிகையாகும்.

அதாவது $S_1 > 0$

வட்டத்தினுள் P இருப்பின் PTக்குக் கற்பனை மதிப்புத்தான் உண்டு. ஆகவே PT^2-ன் மதிப்பு குறையாகும்.

அதாவது $S_1 < 0$

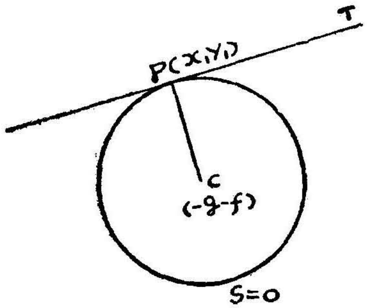
வட்டவரையில் P இருப்பின் PT-ன் மதிப்பு சுன்னமாகும்.

எனவே $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வட்டத்தின் வெளியே, உள்ளே, வட்ட வரையில் இருக்கும் என்பது முறையே

$S_1 \gtreqless 0$ என்பதைப் பொறுத்திருக்கிறது.

இதனால் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ வட்டத்தில் C குறை, மிகை, சுன்னமானால் முறையே வட்டத்தின் உள், வெளி, வட்டவரையில் ஆதி இருக்கும் என அறிக.

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ வட்டத்தில் $(x_1\ y_1)$ இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு.



படம்-18

வட்டத்தின் மையம் $C(-g, -f)$.

CP-ன் சாய்வு வீதம் $= \dfrac{y_1+f}{x_1+g}$.

CPக்கு நேர்குத்தாக PT இருப்பதால் PT-ன் சாய்வு வீதம்

$$= -\frac{x_1+g}{y_1+f}.$$

PT, $(x_1\ y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லுவதால் PT-ன் சமன்பாடு

$$y-y_1=-\frac{x_1+g}{y+f_1}(x-x_1)$$

அதாவது $(y-y_1)(y_1+f)+(x_1+g)(x-x_1)=0$

,, $\quad xx_1+yy_1+gx+fy = x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1$

இருபக்கமும் gx_1+fy_1+cஐ சேர்த்தால்

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c$$
$$= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$
$$= 0$$ [(x_1, y_1) புள்ளி வட்டத்தில் இருப்பதால் $S_1=0$.]

ஆகவே, $(x_1\ y_1)$ இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$$

9. $y=mx+c$ கோடு $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் தொடு கோடாவதற்கு ஏற்ற கட்டுப்பாடு காணல்.

வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து கோட்டிற்கு வரையப்படும் நேர் குத்துக் கோட்டின் நீளம் வட்டத்தின் ஆரைக்குச் சமமானுல் கோடு வட்டத்தின் தொடுகோடாகும்.

வட்டத்தின் மையம் (0, 0). வட்டத்தின் ஆரை$=a$. $y=mx+c$ கோட்டிற்கு (0, 0) புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோட்டின்

$$\text{நீளம்} = \frac{c}{\sqrt{1+m^2}}.$$

$$\therefore\ \frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = a, \text{ (அ - து.) } c^2 = a^2(1+m^2).$$

வேண்டிய கட்டுப்பாடு : $c^2 = a^2(1+m^2)$.

$x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் தொடுவரைச் சமன்பாடு

$$y = mn\pm a\sqrt{1+m^2}.$$

10. $y=mx+c$, $x^2+y^2=a^2$ஐ தொடின், தொடுபுள்ளியின் ஆயத் தொலைகளைக் காணல்.

$y=mx+c$ வட்டத்தை $P(x_1\ y_1)$ல் தொடுவதாகக் கொள்வோம்.

PTயின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1=a^2$.

$$\left.\begin{array}{r} xx_1+yy_1-a^2=0 \\ mx-y+c=0 \end{array}\right\}$$ இவை ஒரே கோட்டின் சமன்பாடுகள்.

$$\therefore\ \frac{x_1}{m}=\frac{y_1}{-1}=\frac{-a^2}{c}.$$

(அ - து.) $x_1 = \dfrac{-a^2m}{c}$, $y_1 = \dfrac{a^2}{c}$.

(x_1, y_1) வட்டத்தில் இருப்பதால் $x_1^2 + y_1^2 = a^2$.

ஆகவே $\dfrac{a^4m^2}{c^2} + \dfrac{a^4}{c^2} = a^2$

$\therefore \quad c^2 = a^2(1+m^2)$.

P-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left\{\dfrac{-am}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right\}$

11. **ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் உண்டு.**

புள்ளி $(x_1\ y_1)$ எனவும், வட்டம் $x^2+y^2=a^2$ எனவும் கொள்க.

தொடுவரையின் சமன்பாடு $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$.

இது (x_1, y_1) வழிச்செல்லின்

$$y_1 = mx_1 + a\sqrt{1+m^2}.$$

$$(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1+m^2)$$

$$m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + y_1^2 - a^2 = 0.$$

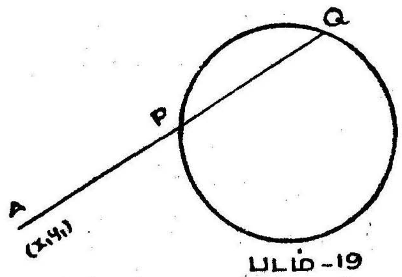
இது இருபடிச் சமன்பாடு ஆதலால் mக்கு இரு மதிப்புகள் உண்டு. ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் நேர் நிலையாக ஒரு தொடுகோடு உண்டு.

(x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் உண்டு.

12. **(x_1, y_1)லிருந்து $x^2+y^2=a^2$க்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு.**

(x_1, y_1) வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$



படம்-19

$$x = x_1 + r\cos\theta, \quad y = y_1 + r\sin\theta.$$

இக்கோடு வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டின் AP, AQ நீளங்களைப் பின்வரும் சமன்பாட்டால் கணக்கிடலாம்.

$$(x_1+r\cos\theta)^2+(y_1+r\sin\theta)^2 = a^2.$$

$$r^2+2r\{x_1\cos\theta+y_1\sin\theta\}+x_1^2+y_1^2-a^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

இந்தக்கோடு வட்டத்தைத் தொட்டால் P, Q புள்ளிகள் ஒன்றுபடும். அந்நிலையில் AP, AQ நீளங்கள் சமமாகும்.

சமன்பாடு (1)க்கு இரு சமதீர்வுகள் உண்டு.

$$(x_1\cos\theta+y_1\sin\theta)^2 = x_1^2+y_1^2-a^2 \quad (2)$$

$\cos\theta$, $\sin\theta$ க்குப் பதில் முறையே $\frac{x-x_1}{r}$, $\frac{y-y_1}{r}$-ஐ (2)-ல் ஈடாக்கினால் Aயிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$A(x_1y_1)$ புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$\{x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)\}^2 = (x_1^2+y_1^2-a^2) \ \{(x-x_1)^2+(y-y_1)\}^2$$

$$\}(xx_1+yy_1-a^2)-(x_1^2+y_1^2-a^2)\}^2$$

$$= (x_1^2+y_1^2-a^2) \ \{(x^2+y^2-a^2)+(x_1^2+y_1^2-a^2)\} -2(xx_1+yy_1-a^2)$$

$$(T-S_1)^2 = S_1(S+S_1-2T)$$

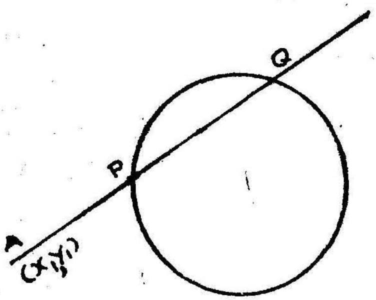
$$T^2+S_1^2-2TS_1 = SS_1^2+S_1^2-2TS_1$$

$$T^2 = SS_1$$

12-A. (x_1, y_1) லிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$க்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு.

(x_1, y_1) வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta} = r$ எனக் கொள்வோம்.

$$x=x_1+r\cos\theta \qquad y=y_1+r\sin\theta$$



படம்-20

இக்கோடு வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால் AP, AQ நீளங்களைப் பின்வரும் சமன்பாட்டால் கணக்கிடலாம்.

$$(x_1+r\cos\theta)^2+(y_1+r\sin\theta)^2+2g(x_1+r\cos\theta)$$
$$+2f(y_1+r\sin\theta)+c=0$$

(அ - து.) $r^2+2r\{(x_1+g)\cos\theta+(y_1+f)\sin\theta\}+x_1^2+y_1^2$
$$+2gx_1+2fy_1+c=0 \qquad (1)$$

இக்கோடு வட்டத்தைத் தொட்டால் P, Q புள்ளிகள் ஒன்றுபடும். அந்நிலையில் AP, AQ நீளங்கள் சமமாகும்.

சமன்பாடு (1)க்கு இரு சம தீர்வுகள் உண்டு.

$$\therefore \{(x_1+g)\cos\theta+(y_1+f)\sin\theta\}^2$$
$$= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \qquad (2)$$

$\cos\theta$, $\sin\theta$-க்குப் பதில் $\frac{x-x_1}{r}$, $\frac{y-y_1}{r}$-ஐ (2)-ல் ஈடாக்கினால் A யிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

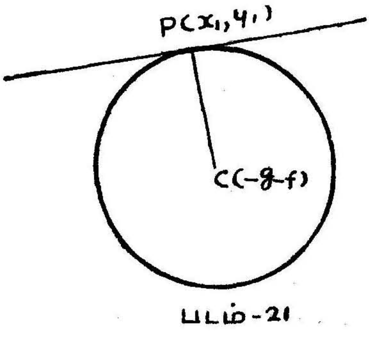
$A(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$\{(x_1+g)(x-x_1)+(y+f)(y-y_1)\}^2$$
$$= (x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c)r^2$$
$$= \{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c\}\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}$$

(அ - து.) $[\{xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c\}$
$$-\{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c\}]^2$$
$$= (x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c)\{x^2+y^2+2gx+2fy+c$$
$$+x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c-2(xx_1+yy_1+gx+x_1+(fy+y_1+c)\}$$

$$(T-S_1)^2 = S_1(S+S_1-2T)$$
$$T^2+S_1^2-2TS_1=SS_1+S_1^2-2TS_1$$

(அ - து.) $T^2 = SS_1$



படம்-21

13. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ வட்டத்தில் $P(x_1, y_1)$ இடத்துச் செங்கோடு (normal).

வட்டத்தின் மையம்
$$C(-g, -f)$$

$P(x_1y_1)$ இடத்துச் செங்கோடு C வழிச் செல்லும்.

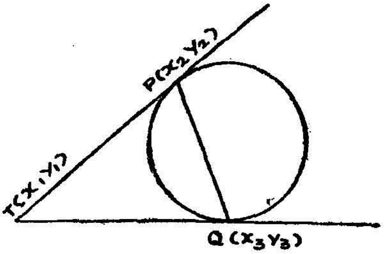
∴ CP செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{x_1+g}=\frac{y-y_1}{y_1+f}$$

$$(x-x_1)\ (y_1+f) = (y-y_1)\ (x_1+g)$$

14. $T(x_1, y_1)$ லிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$க்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாணுக்கு (chord of contact)ச் சமன்பாடு காணுதல்.

T, P, Qன் ஆயத்தொலைகள் முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) எனக் கொள்வோம்.



படம்-22

$P\ (x_2\ y_2)$ இடத்துத் தொடுகோடு

$$xx_2+yy_2+g(x+x_2)+f(y+y_2)+c=0 \qquad (1)$$

$Q\ (x_3y_3)$ இடத்துத் தொடுகோடு

$$xx_3+yy_3+g(x+x_3)+f(y+y_3)+c=0 \qquad (2)$$

இவ்விரு தொடுகோடுகளும் (x_1, y_1) வழிச் செல்லுவதால்

$$x_1x_2+y_1y_2+g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+c=0 \qquad (3)$$

$$x_1x_3+y_1y_3+g(x_1+x_3)+f(y_1+y_3)+c=0 \qquad (4)$$

$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இச்சமன்பாடு குறிக்கும் கோடு (3), (4) சமன்பாடுகளினால் (x_2y_2), (x_3y_3) புள்ளிகள் வழியே செல்லும்.

∴ PQன் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

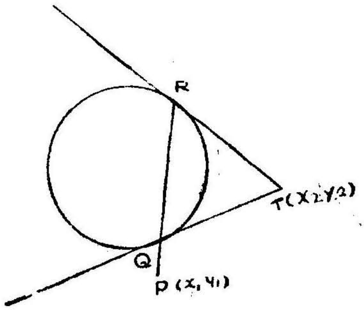
15. இசைப் புள்ளியும் இசைக் கோடும் (pole and polar) வரையறை :

P வழிச் செல்லும் ஒரு கோடு வட்டத்தினை வெட்டும் Q, R புள்ளியிடத்துத் தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை Pயின்

இசைக்கோடு (polar) என்றும் P இசைக் கோட்டின் இசைப்புள்ளி (pole) என்றும் கூறப்படும்.

16. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ **(வட்டத்தைச் சார்ந்த (x_1, y_1)ன் இசைக்கோடு.**

P வழிச் செல்லும் கோடு வட்டத்தினை Q, R-ல் வெட்டும் எனவும் Q, R இடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $T(x_2\ y_2)$ எனவும் கொள்வோம்.



படம்-23

T-ன் இயங்குவரை P-ன் இசைக் கோடாகும்.

Tலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண் QR ஆனதால் QR-ன் சமன்பாடு

$$xx_2+yy_2+g(x+x_2)+f(y+y_2)+c=0$$

இக்கோடு $P(x_1y_1)$ வழிச் செல்லுவதால்

$$x_1x_2+y_1y_2+g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+c=0$$

$T(x_2y_2)$-ன் இயங்குவரை

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

ஆகவே $P(x_1y_1)$-ன் இசைக்கோடு

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0 \text{ ஆகும்.}$$

17. P-ன் இசைக்கோடு Q வழிச் செல்லின் Q-ன் இசைக்கோடு P வழிச் செல்லும்.

வட்டம் $x^2+y^2=a^2$ என்றும் P, Q புள்ளிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்றும் கொள்வோம்.

$P(x_1y_1)$-ன் இசைக்கோடு $xx_1+yy_1=a^2$.

இது $Q(x_2y_2)$ வழிச் செல்லுவதால் $x_1x_2+y_1y_2=a^2$.

ஆகவே (x_1y_1) புள்ளி $xx_2+yy_2=a^2$-ல் இருக்கும்.

அதாவது $Q(x_2y_2)$-ன் இசைக்கோடு $P(x_1y_1)$ வழிச்செல்லும்.

இரு புள்ளிகளுள் ஒன்றின் இசைக்கோடு மற்றொன்றின் வழிச் சென்றால் இப்புள்ளிகள் துணையியப் புள்ளிகள் (conjugate points) எனக் கூறப்படும்.

இரு கோடுகளுள் ஒன்றின் இசைப்புள்ளி மற்றொன்றில் இருந்தால் அக்கோடுகள் துணையியக் கோடுகள் (conjugate lines) எனக் கூறப்படும்.

18. $x^2+y^2=a^2$ஐச் சார்ந்த $lx+my+n=0$-ன் இசைப் புள்ளியைக் காண்க.

$lx+my+n=0$-ன் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1)-ன் இசைக்கோடு $xx_1+yy_1=a^2$

$$\left.\begin{array}{l} xx_1+yy_1-a^2=0 \\ lx+my+n=0 \end{array}\right\}$$ இச்சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{x_1}{l}=\frac{y_1}{m}=\frac{-a^2}{n}$$

$$x_1=\frac{-a^2l}{n}, \quad y_1=\frac{-a^2m}{n}$$

$lx+my+n=0$-ன் இசைப்புள்ளி $\left(\frac{-a^2l}{n}, \frac{-a^2m}{n}\right)$

19. $lx+my+n=0$, $l_1x+m_1y+n_1=0$ கோடுகள் $x^2+y^2=a^2$ஐச் சார்ந்த துணையியக் கோடுகளாவதற்குரிய கட்டுப்பாடு காண்க.

$x^2+y^2=a^2$ஐச் சார்ந்த $lx+my+n=0$-ன்

இசைப்புள்ளி $\left(\frac{-a^2l}{n}, \frac{-a^2m}{n}\right)$

இப்புள்ளி $l_1x+m_1y+n_1=0$-ல் இருப்பதால்

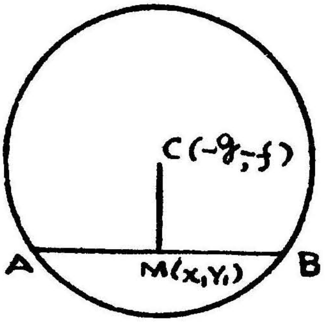
$$l_1\left(\frac{-a^2l}{n}\right)+m_1\left(\frac{-a^2m}{n}\right)+n_1=0$$

$$a^2ll_1+a^2mm_1-nn_1=0$$

$$a^2(ll_1+mm_1)=nn_1$$

20. குறித்த புள்ளியை நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு.

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ வட்டத்தில் நாண் ஒன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1y_1) எனக் கொள்வோம்.



படம்-24

வட்டத்தின் மையம் $C(-g, -f)$. AB என்ற நாணின் நடுப் புள்ளி M. CM, ABக்கு நேர்குத்துக்கோடு.

$$CM\text{-ன் சாய்வு வீதம்} = \frac{y_1+f}{x_1+g}$$

$$\therefore AB\text{-ன் சாய்வு வீதம்} = -\frac{x_1+g}{y_1+f}$$

$$AB\text{-ன் சமன்பாடு } y-y_1 = -\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)$$

$$(y-y_1)(y_1+f)+(x-x_1)(x_1+g)=0$$

$$xx_1+yy_1+gx+fy = x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1$$

இருபக்கமும் gx_1+fy_1+c-ஐ கூட்டினால்

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c$$
$$= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$
$$T = S_1.$$

மாதிரி 1 : $3x^2+3y^2+4x-8y-41=0$ வட்டத்தின் மையம், ஆரை இவற்றினைக் காண்க.

சமன்பாட்டினை 3ஆல் வகுத்தால்

$$x^2+y^2+\tfrac{4}{3}x-\tfrac{8}{3}y-\tfrac{41}{3}=0$$

வட்டத்தின் மையம் $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

ஆரை $= \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{16}{9}+\frac{41}{3}}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{143}$.

மாதிரி 2 : (1, 1), (2, −1), (3, 2) புள்ளிகளின் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனக் கொள்வோம்.

இப்புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைச் சமன்பாட்டில் ஈடாக்கின்

$$2g+2f+c=-2 \quad\ldots\ldots(1)$$
$$4g-2f+c=-5 \quad\ldots\ldots(2)$$
$$6g+4f+c=-13 \quad\ldots\ldots(3)$$

இச்சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின்

$g=-\frac{5}{2}$, $f=-\frac{1}{2}$, $c=4$.

ஆகவே வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-5x-y+4=0$.

மாதிரி 3 : $x^2+y^2-2x-6y+9=0$, $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் 1 : 2 தகவில் இருப்பின் அப்புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு வட்டமென நிறுவுக.

அப்புள்ளியை (x_1, y_1) என எடுத்துக்கொள்.

(x_1, y_1)-லிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் முறையே

$\sqrt{x_1^2+y_1^2-2x_1-6y_1+9}$, $\sqrt{x_1^2+y_1^2+6x_1-2y_1+1}$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{x_1^2+y_1^2-2x_1-6y_1+9}{x_1^2+y_1^2+6x_1-2y_1+1} = \frac{1}{4}.$$

$$3x_1^2-3y_1^2-14x_1-22y_1+35 = 0.$$

$\therefore$ (x_1, y_1), $3x^2+3y^2-14x-22y+35=0$ வட்டத்தில் எப்போதும் இருத்தல் வேண்டும்.

ஆகவே (x_1, y_1)ன் இயங்குவரை

$3x^2+3y^2-14x-22y+35=0$ என்னும் வட்டமாகும்.

மாதிரி 4 : $5x+y-103=0$; $x-y-11=0$, $2x-3y-31=0$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டச் சமன்பாட்டினைக் காண்க. ஆரையை கண்டுபிடி.

$$(5x+y-103)(x-y-11)+l(x-y-11)(2x-3y-31)$$
$$+m(2x-3y-31)(5x+y-103)=0$$

சமன்பாட்டினைப் பார்ப்போம்.

இச்சமன்பாட்டு வளைவரை, இக்கோடுகள் தம்முள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் எனக் காணலாம்.

இச்சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தினைக் குறிப்பின்

x^2ன் கெழு $=$ y^2ன் கெழு.

xyன் கெழு $= 0$.

$$5+2l+10m = -1+3l-3m$$
$$-4-5l-13m = 0.$$

இச்சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $l=\frac{1}{3}$, $m=-\frac{17}{39}$.

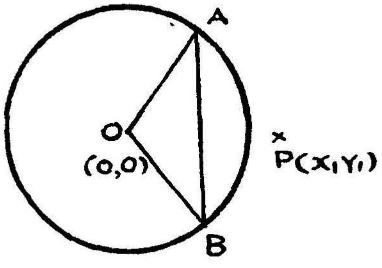
சுற்று வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{1}{13}(17x^2+17y^2-238x-102y-1887) = 0$$

(அ - து.) $x^2+y^2-14x-6y-111 = 0$.

ஆரை $= \sqrt{49+9+111} = \sqrt{169} = 13$

மாதிரி 5 : $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் மையத்தில் செங்கோணம் உண்டுபண்ணும் நாண்களின் இசைப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை காண்க.



படம் -25

$O(0, 0)$ல் செங்கோணம் உண்டுபண்ணும் நாண் ABன் இசைப் புள்ளி $P(x_1\ y_1)$ என்று கொள்வோம்.

$P(x_1, y_1)$ன் இசைக்கோடு $\quad xx_1+yy_1 = a^2$.

$\therefore$ ABயின் சமன்பாடு $\quad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{a^2} = 1$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $\quad x^2+y^2 = a^2$.

$x^2+y^2-a^2=0$ சமன்பாட்டினை $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{a^2}=1$

சமன்பாட்டால் சமபடித்தான சமன்பாடு ஆக்கின்

$$x^2+y^2-a^2\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{a^2}\right)^2=0.$$

இச்சமன்பாடு OA, OB கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$A\hat{O}B = 90°$

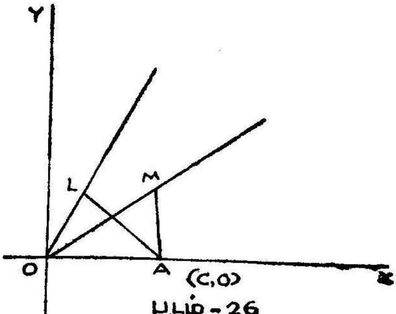
$\therefore$ x^2ன் கெழு $+ y^2$ன் கெழு $= 0$

$$1-\frac{x_1^2}{a^2}+1-\frac{y_1^2}{a^2}=0$$

$$x_1^2+y_1^2=2a^2.$$

$P(x_1\ y_1)$ன் இயங்குவரை $x^2+y^2=2a^2$

மாதிரி 6 : (c, o) புள்ளியிலிருந்து $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகளுக்கு வரையப்பட்ட நேர்குத்துக் கோடுகளின் அடிகள் L, M ஆனால் அதன் சமன்பாடு $(a-b)x+2hy+bc=0$ என நிறுபி.



படம்-26

LMன் சமன்பாடு $lx+my=1$ எனக்கொள்வோம்.

OAஐ விட்டமாகவுள்ள வட்டம் L, M புள்ளிகள் வழிச்செல்லும்.

$AOML$ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-0)(x-c)+(y-0)(y-0)=0$$

$$x^2+y^2-cx=0.$$

$x^2+y^2-cx=0$ சமன்பாட்டினை $lx+my=1$ சமன்பாட்டால் சமபடித்தான சமன்பாடு ஆக்கின்

$$x^2+y^2-cx\,(lx+my)=0$$

இச்சமன்பாடு OL, OM கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+2hxy+by^2=0 \\ x^2(1-cl)-mcxy+y^2=0 \end{array}\right\}$$ இரு சமன்பாடுகளும் OL, OM கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{1-cl}{a} = \frac{-mc}{2h} = \frac{1}{b}$$

$$1-cl = \frac{a}{b}; \; l = \frac{b-a}{bc}$$

$$mc = -\frac{2h}{b}; \; m = -\frac{2h}{bc}$$

$\therefore$ LM-ன் சமன்பாடு $\frac{b-a}{bc}x - \frac{2h}{bc}y = 1$

$$(a-b)x-2hy+bc=0.$$

மாதிரி 7 : $x^2+y^2+4x-6y-9=0$ வட்டத்தின் நாண்கள் x அச்சோடு $\tan^{-1}\frac{3}{5}$ கோணத்தைப் பிறப்பிப்பின் அவற்றின் நடுப் புள்ளிகளுடைய இயங்குவரை என்ன?

அத்தகைய நாண் ஒன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

ஆகவே நாணின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+2(x+x_1)-3(y+y_1)+9=x_1^2+y_1^2+4x_1-6y_1+9$$

(அ - து.) $x(x_1+2)+y(y_1-3)-x_1^2-y_1^2-2x_1+3y_1=0$

இக்கோடு x-அச்சோடு பிறப்பிக்கும் கோணம்

$\tan^{-1}\frac{3}{5}$ எனில் $-\frac{x_1+2}{y_1-3}=\frac{3}{5}$

அதாவது $-5x_1-10-3y_1+9=0$

(அ - து.) $5x_1+3y_1+1=0.$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $5x+3y+1=0$ ஆகும்.

பயிற்சிகள் 4

1. பின்வரும் வட்டங்களின் மையம் ஆரைகளைக் காண்க:

(i) $x^2+y^2-4x+6y-12=0$

(ii) $4x^2+4y^2-8x-16y-29=0$

(iii) $2x^2+2y^2+6x+4y=0$

(iv) $3x^2+3y^2+4x-8y-41=0$

விடை: (i) $(2,-3)$, 5 (ii) $(1, 2)$, $\frac{7}{2}$.

(iii) $(-\frac{3}{2}, -1)$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (iv) $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, $\frac{\sqrt{143}}{3}$.

2. பின்வரும் புள்ளிகள் மையமாகத் தொலைகள் ஆரையாகக் கொண்ட வட்டங்களின் சமன்பாட்டினைக் காண்க :

(i) மையம் $(-2, 3)$ ஆரை 5

(ii) மையம் $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ ஆரை 6

(iii) மையம் $(-1, -2)$ ஆரை $\frac{5}{2}$

விடை : (i) $x^2+y^2+4x-6y-12=0$

(ii) $2x^2+2y^2-6x-14y-43=0$

(iii) $4x^2+4y^2+8x+16y-5=0$

3. பின்வரும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க :

(i) $(0, 1), (2, 3), (-2, 5)$

(ii) $(1, -2), (2, -1), (3, 1)$

விடை : (i) $3x^2+3y^2+2x-20y+17=0$

(ii) $x^2+y^2+5x-5y-20=0$

4. $(2, -3), (-2, 4)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது ?

விடை : $x^2+y^2-y=16$.

5. $2x-y+1=0$; $x+2y-2=0$, $3x-4y-6=0$ கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டச் சமன்பாடு காண்க :

விடை : $x^2+y^2+3y-4=0$.

6. $(2, -3), (4, 5)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

விடை: $x^2+y^2-6x-2y-7=0$.

7. ஒரு வட்டத்தின் மையம் $4x+y-16=0$ கோட்டிலுள்ளது. அவ்வட்டம் $(4, 1), (6, 5)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லுமானால் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

விடை : $x^2+y^2-6x-8y+15=0$.

8. $x^2+y^2=400$; $x^2+y^2-10x-24y+12=0$ அகந்தொடு வட்டங்கள் என நிறுவுக.

9. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$; $x^2+y^2-6x+18y+26=0$ புறந்தொடு வட்டங்கள் என நிறுவுக.

10. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ $x^2+y^2+10x+12y+45=0$ வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் விகிதம் 3 : 4 என இருக்க அப்புள்ளி இயங்குமாயின், அப்புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு வட்டமென நிறுவுக. இவ்வட்டத்தின் மையம், ஆரையைக் காண்க.

விடை : $7x^2+7y^2-122x-172y-469=0$ $(\frac{61}{7}, \frac{86}{7})$; $\frac{120}{7}$.

11. (1, 0), (2, 0), (3, 2) புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் முறையே 1, $\sqrt{7}$, $\sqrt{2}$ என்றிருப்பின், வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

விடை : $2x^2+2y^2+6x-17y-6=0$.

12. $3x-4y-1=0$ கோட்டினுக்கு ஒருபோகான $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் யாவை? தொடுபுள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

விடை : $3x-4y+10=0$. தொடுபுள்ளி $(\frac{2}{5}, \frac{14}{5})$
$3x-4y=0$. தொடுபுள்ளி $(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$

13. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக இருப்பின் அப் புள்ளியின் இயங்குவரை என்ன?

விடை : $x^2+y^2+2gx+2fy+c-g^2-f^2=0$.

14. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் 120° எனின், அப்புள்ளியின் இயங்குவரை $3x^2+3y^2+12x-18y+35=0$ என நிறுவுக.

15. $lx+my=1$ கோடு $ax^2+2hxy+by^2=0$ கோடுகளை P, Q-ல் வெட்டினால், PQ-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

(x^2+y^2) $(am^2-2hlm+bl^2)-2x(bl-hm)-2y(am-hl)+a+b=0$ என நிறுவுக.

16. $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ கோடு

$x^2+y^2-2ax\cos\alpha-2by\sin\alpha-a^2\sin^2\alpha=0$ வட்டத்தைத் தொடுமானால் p-ன் மதிப்பு என்ன?

விடை : $a\cos^2\alpha-b\sin^2\alpha-\sqrt{a^2+b^2}\,\sin^2\alpha$.

17. (4, −2), (2, −8) புள்ளிகள் $x^2+y^2-24=0$ வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகள் (conjugate points) எனக் காண்பி.

18. $3x+y-2=0$, $x+7y-11=0$ கோடுகள் $x^2+y^2-6x-6y+5=0$ வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியக் கோடுகள் (conjugate lines) எனக் காண்பி.

19. நேர்குத்தான இருகோடுகள் ஒரு வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியக் கோடுகளாயின், அவற்றில் ஒன்று மையம் வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

20. $x^2+y^2=c^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த $(x-a)^2+y^2=b^2$ வட்டத்துத் தொடுகோடுகளின் இசைப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை $(a^2-b^2)x^2-b^2y^2-2c^2ax+c^4=0$ என நிறுவுக.

21. $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தில் (h, k) புள்ளிவழிச் செல்லும் நாண்களின் நடுப்புள்ளியினது இயங்குவரையினைக் காண்க.

விடை : $x^2+y^2-hx-ky=0$.

22. $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் நாண்கள் (h, k) புள்ளியில் செங்கோணத்தை உண்டுபண்ணுகின்றன. அந்நாண்களின் இசைப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை காண்க.

விடை : $(x^2+y^2)(h^2+k^2-a^2)=2a^2(hx+ky-a^2)$.

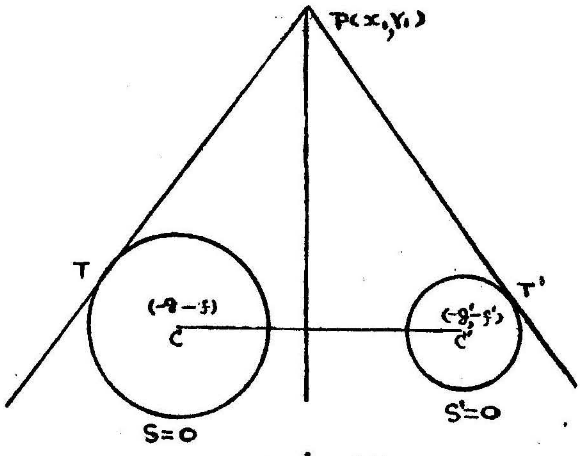
23. $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த p-ன் இசைக்கோடு $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=b^2$ வட்டத்தைத் தொடின் p-ன் இயங்குவரை $(\alpha x+\beta y-a^2)^2=b^2(x^2+y^2)$ என நிறுவுக.

4. ஒருநிலை வட்டங்கள்
(System of Circles)

சமத்தொடு அச்சு (Radical axis)

வரையறை : ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் நீளம் சமமாக இருந்தால் அப்புள்ளியின் இயங்கு வரை வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு (Radical axis) எனப்படும்.

வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்



படம் - 27

$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$S^1 \equiv x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ எனக் கொள்வோம்.

$P(x_1 y_1)$ எனவும் P-லிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடு வரைகளை PT, PT' எனவும் கொள்வோம்.

$$PT'^2 = x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$
$$PT'^2 = x_1^2+y_1^2+2g'x_1+2f_1y_1+c'$$
இங்கு $PT=PT'$
$$\therefore\ x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=x_1^2+y_1^2+2g'x_1+2f'y_1+c'$$
$$2(g-g')x_1+2(f-f')y_1+c-c'=0.$$
$\therefore$ $P(x_1y_1)$ன் இயங்குவரை $S-S'=0$
$$2(g-g')x+2(f-f')y=c'-c.$$

இது ஒருபடிச் சமன்பாடு ஆதலால் சமத்தொடு அச்சு ஒரு கோடாகும்.

இதன் சாய்வு வீதம் $= -\dfrac{g-g'}{f-f'}$

வட்டங்களின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு வீதம்
$=\dfrac{f-f'}{g-g'}$

இந்த இரண்டு கோடுகளின் சாய்வு வீதங்களின் பெருக்குத் தொகை $= -1$ ஆகும்.

$\therefore$ சமத்தொடு அச்சு, மையங்கள் வழிச் செல்லும் கோட்டிற்கு நேர்குத்தாக இருக்கும்.

இரு வட்டத்தின் பொதுத் தொடுகோடுகள் அனைத்தையும் சமத் தொடு அச்சு இரு சமமாகப் பிரிக்கும்.

2. இரு வட்டங்கள் தம்முள் தொடுமெனின் தொடுமிடத்துத் தொடுகோடு அவ்வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு ஆகும்.

இருவட்டங்களின் பொது நாண் அவ்வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு ஆகும்.

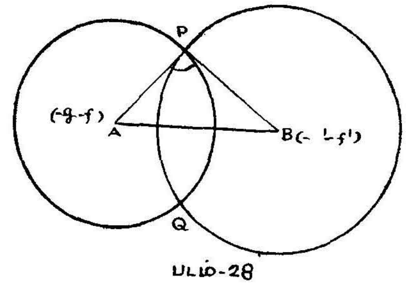
$S=0$, $S'=0$ இவ்வட்டங்களின் சமத்தொடு கோடு $S-S'=0$ எனப் பார்த்தோம்.

$S=0$, $S^1=0$ சமன்பாடுகளோடு பொருந்தும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $S-S'=0$ சமன்பாட்டோடும் பொருந்தும். எனவே இவ்வட்டங்களின் பொதுப்புள்ளிகள் வழி $S-S'=0$ செல்லும். இது ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு ஆகையால் பொது நாணின் சமன்பாடு ஆகும்.

இவ்வட்டங்கள் கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டினாலும் $S-S'=0$ அப்புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் பொது நாணின் சமன்பாடே.

ஆகவே இருவட்டங்களின் பொது நாண் அவ்வட்டங்களின் சமத் தொடு அச்சு ஆகும்.

3. இரு வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டும் கட்டுப்பாடு காண்க.



படம்-28

வட்டங்கள்

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$
$$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$$

எனக் கொள்வோம்.

வட்டங்களின் மையங்கள் A, B. வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகளில் ஒன்று P எனக் கொள்க.

ஆகவே $A(-g, -f)$, $B(-g', -f')$

$AP^2 = g^2+f^2-c$, $BP^2 = g'^2+f'^2-c'$

$A\hat{P}B = 90°$ $\therefore AB^2=AP^2+BP^2$

(அ - து). $(-g+g')^2+(-f+f')^2=g^2+f^2-c+g'^2+f'^2-c'$

(அ - து). $2gg'+2ff'=c+c'$

4. சமத்தொடு அச்சுச்சந்தி (Radical centre)

மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுத்துக்கொண்டால், அவைகளின் சமத்தொடு அச்சுகள் ஒருபுள்ளி வழிச்செல்லும். அப் புள்ளி சமத்தொடு அச்சுச் சந்தியாகும்.

வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0 \quad \ldots\ldots(1)$$
$$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0 \quad \ldots\ldots(2)$$
$$x^2+y^2+2g_3x+2f_3y+c_3=0 \quad \ldots\ldots(3)$$

எனக் கொள்வோம்.

வட்டங்கள் (1), (2)-ன் சமத்தொடு அச்சு

$$u\equiv 2x(g_1-g_2)+2y(f_1-f_2)+c_1-c_2=0$$

வட்டங்கள் (2), (3)-ன் சமத்தொடு அச்சு

$$v \equiv 2x(g_2-g_3)+2y(f_2-f_3)+c_2-c_3=0$$

வட்டங்கள் (3) (1)-ன் சமத்தொடு அச்சு

$$w \equiv 2x(g_3-g_1)+2y(f_3-f_1)+c_3-c_1=0$$

இங்கு $u+v+w=0$ ஆதலால் இந்த மூன்று சமத்தொடு அச்சுகளும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும். அப்புள்ளி சமத்தொடு அச்சுச் சந்தியாகும்.

சமத்தொடு அச்சு சந்தியிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் சமமாக இருக்கும். இப்புள்ளியை மையமாகவும் இப்புள்ளியிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் நீளத்தினை ஆரையாகவும் கொண்டு வரையும் வட்டம் இம்மூன்று வட்டங்களையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும்.

இரு வட்டங்களின் வெட்டும் புள்ளியிடத்து வரையப்படும் தொடு கோடுகள் தம்முள் ஒரு செங்கோணத்தைக் கொண்டால், அவ்வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டங்கள் (orthogonal circles) எனப்படும்.

5. மையங்களை இணைக்கும் கோட்டினை x-ஆயமாகவும், சமத்தொடு அச்சினை y-ஆயமாகவும் கொண்டு, பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் (coaxal circles) சமன்பாடு காணல்.

இவ்வட்டங்கள்

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$$

எனக் கொள்வோம்.

வட்டங்களின் மையங்கள் x ஆயத்தில் இருப்பதால்

$$-f=-f'=0$$

வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு

$$2x(g-g')+c-c'=0$$

இது y-ஆயமாதலால் $x=0$

$$\therefore \ c=c'$$

வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+2gx+c=0$$

$$x^2+y^2+2g'x+c=0$$

இச்சமன்பாடுகளில் x கெழு மாறுகிறது. c-மாறா இராசியாகும்.

$x^2+y^2+2gx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். g-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்குத்தக, இந்த ஒரு நிலை வட்டங்களில் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். ஆகவே g-ன் மதிப்பினை மாற்றினால் இந்த ஒரு நிலை வட்டங்களைச் சேர்ந்த வட்டங்கள் அனைத்தின் சமன்பாடு களையும் காணலாம்.

6. எல்லைப் புள்ளிகள் (Limiting points)

பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+c=0$ எனப் பார்த்தோம்.

இதனை $(x+g)^2+y^2=g^2-c$ என எழுதலாம்.

$g=\pm\sqrt{c}$ ஆனால் வட்டங்களின் சமன்பாடு $(x-\sqrt{c})^2+y^2=0$, அல்லது $(x+\sqrt{c})^2+y^2=0$. இவ்வட்டங்களின் மையம் $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$: ஆரை சுன்னம்.

$(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ புள்ளிகள் எல்லைப் புள்ளிகள் (limiting points) எனப்படும். இவை மையங்களை இணைக்கும் கோட்டில் சமத் தொடு அச்சுக்கு இரு பக்கத்திலும் சம தூரத்தில் இருக்கும். இப் புள்ளிகளைப் புள்ளி வட்டங்கள் (point circles) எனவும் கூறுதல் உண்டு.

எல்லைப் புள்ளிகள் c மிகையானால் மெய்ப்புள்ளிகளாகவும், c குறையானால் கற்பனைப் புள்ளிகளாகவும் இருக்கும்.

வெட்டும் பொதுஆயமுடைய வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் கற்பனைப் புள்ளிகள் என்றும், வெட்டாப் பொது ஆயமுடைய வட்டங் களின் எல்லைப் புள்ளிகள் மெய்ப்புள்ளிகள் என்றும் அறியலாம்.

7-A. பொது ஆயமுடைய வட்டங்களில் எல்லைப் புள்ளிகள் ஒவ்வொரு வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகளாகும்.

$x^2+y^2+2gx+c=0$

$(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ எல்லைப் புள்ளிகள்.

$x^2+y^2+2gx+c=0$ஐச் சார்ந்த $(\sqrt{c}, 0)$-ன்

இசைக்கோடு $x\sqrt{c}+g(x+\sqrt{c})+c=0$

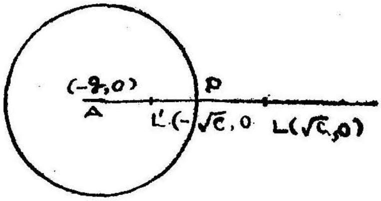
$$(g+\sqrt{c})(x+\sqrt{c})=0$$

$$x+\sqrt{c}=0$$

இக்கோடு மற்றைய எல்லைப்புள்ளி $(-\sqrt{c}, 0)$ வழிச்செல்லும். ஆகவே $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ துணையியப் புள்ளிகள். (conjucate points)

7-B. எல்லைப் புள்ளிகள் ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் (inverse points) ஆகும்.

பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+c=0$ எனக் கொள்ளின் அதன் எல்லைப் புள்ளிகள் $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ $L(\sqrt{c}, 0)$ and $L'(-\sqrt{c}, 0)$ எனக் கொள்வோம்.



படம்-29

$$AL' = (-g+\sqrt{c})$$
$$AL = (-g-\sqrt{c})$$
$$Ap^2 = g^2-c$$
$$AL \cdot AL' = (-g-\sqrt{c})(-g+\sqrt{c})$$
$$= g^2-c$$
$$\therefore AP^2 = AL \cdot AL'$$

எனவே எல்லைப் புள்ளிகள் ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும் தன் மாற்றுப் புள்ளிகள் (inverse points) ஆகும்.

8. பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டம், அவ்வட்டங்களனைத்தையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும்.

பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+c=0$ எனக் கொள்ளின் அதன் எல்லைப் புள்ளிகள் $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$

$(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ புள்ளிகளின் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ எனக் கொள்வோம்.

$$c+2g'\sqrt{c}+c'=0$$
$$c-2g'\sqrt{c}+c'=0$$
$$\therefore g'=0\,; \quad c'=-c.$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2f'y-c=0$. f'-ன் மதிப்பு என்னவானாலும் $x^2+y^2+2gx+c=0$ $x^2+y^2+2f'y-c=0$ வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டும்.

f'-ன் மதிப்பு மாறுந்தோறும் பல்வேறு வட்டங்கள் கிடைக்கும். ஆனால் இவ்வட்டங்களனைத்தும் $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ வழிச்செல்லும்.

ஆகவே $x^2+y^2+2f'y-c=0$ சமன்பாடு பொது ஆயமுடைய ஒரு நிலைவட்டங்களை (system of coaxal circles)க் குறிக்கும்.

9. $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, $S'=x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ **வட்டங்களோடு பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு காணல்.**

$S+\lambda S'=0$ (λ ஒரு நிலை எண்) சமன்பாட்டைப் பார்ப்போம்.

இச்சமன்பாட்டில் x^2-ன் கெழு$=y^2$-ன் கெழு. xy-ன் கெழு$=0$. ஆகவே λவின் மதிப்பு யாதாயினும் $S+\lambda S'=0$ ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். மேலும் $S+\lambda S'=0$, $S=0$, $S'=0$ வட்டங்களின் பொதுப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும்.

ஆகவே λ-ன் பல மதிப்புகளுக்குத் தக $S+\lambda S'=0$, $S=0$, $S'=0$ ஒரு பொது ஆயமுடைய வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

10. **ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு :** $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ **என்றும், ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு** $L=lx+my+n=0$ **என்றும் கொள்வோம்.**

$S+\lambda L=0$ சமன்பாட்டைக் காண்போம். இச்சமன்பாட்டில் x^2-ன் கெழு$=y^2$-ன் கெழு. xy-ன் கெழு$=0$.

ஆகவே λவின் மதிப்பு எதுவாயினும் $S+\lambda L=0$ ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். மேலும் $S+\lambda L=0$, $S=0$, $L=0$வின் பொதுப் புள்ளிகள் வழிச்செல்லும். ஆகவே λ-ன் பல மதிப்புகளுக்குத்தக $S+\lambda L=0$ ஒரு பொது ஆயமுடைய வட்டங்களைக் குறிக்கும். $L=0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு ஆகும்.

மாதிரி 1 : **வட்டங்கள்** $x^2+y^2-4x+6y+8=0$, $x^2+y^2-10x-6y+14=0$ **ஒன்றையொன்று தொடும் என நிரூபி. தொடுபுள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்.**

வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு $6x+12y-6=0$

(அ - து.) $x+2y-1=0$.........(1)

முதல் வட்டத்தின் மையம் $A(2, -3)$; ஆரை$=\sqrt{5}$

$A(2, -3)$லிருந்து $x+2y-1=0$க்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $=\left|\dfrac{2-6-1}{\sqrt{5}}\right|=\sqrt{5}$

= வட்டத்தின் ஆரை.

ஆகவே $x+2y-1=0$ முதல் வட்டத்தைத் தொடும். சமத்தொடு அச்சு ஒரு வட்டத்தைத் தொடுவதால் மறு வட்டத்தையும் தொடும். ஆகவே இருவட்டங்களும் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன.

இரண்டாவது வட்டத்தின் மையம் $B(5, 3)$

$$AB\text{யின் சமன்பாடு} = \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{6}$$

$$(\text{அ - து})\quad 2x-y-7=0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

சமத்தொடு அச்சும் மையங்களை இணைக்கும் கோடும் வெட்டும் புள்ளி தொடுபுள்ளியாகும்.

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ஐ விடுவிப்பின்

$$x=3,\quad y=-1$$

வட்டங்கள் $(3, -1)$ புள்ளியில் தொடும்.

மாதிரி 2 : $x^2+y^2+2x+4y+1=0$, $2x^2+2y^2+6x+8y-3=0$ $x^2+y^2-2x+6y-3=0$ வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் சமன்பாடு என்ன?

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனக் கொள்வோம்.

$$x^2+y^2+2x+4y+1 = 0 \qquad (1)$$
$$x^2+y^2+3x+4y-\tfrac{3}{2} = 0 \qquad (2)$$
$$x^2+y^2-2x+6y-3 = 0 \qquad (3)$$

இது முதல் வட்டத்தைச் செங்கோணத்தில் வெட்டுவதால்

$$2g+4f = c+1 \qquad (4)$$

இரண்டு, மூன்று வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டுவதால்,

$$3g+4f = c-\tfrac{3}{2} \qquad (5)$$
$$-2g+6f = c-3 \qquad (6)$$

சமன்பாடுகள் (4), (5), (6)ஐ விடுவிப்பின்

$$g=-\tfrac{5}{2},\ f=-7,\ c=-34$$

வேண்டிய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2-5x-14y-34=0$$

பிறிதொரு முறை :

வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சுக்கள்

$$-x+\tfrac{5}{2} = 0$$
$$5x-2y+\tfrac{3}{2} = 0$$
$$4x-2y+4 = 0$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின்

$x = \frac{5}{2}, \quad y = 7.$

சமத்தொடு அச்சுச் சந்தி $(\frac{5}{2}, 7)$

$(\frac{5}{2}, 7)$லிருந்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோட்டின் நீளம் T எனின்

$$T^2 = \tfrac{25}{4}+49+5+28+1.$$

மூன்று வட்டங்களையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-\tfrac{5}{2})^2+(y-7)^2 = T^2 = \tfrac{25}{4}+49+5+28+1$$

$$x^2+y^2-5x-14y = 34$$

$$x^2+y^2-5x-14y-34 = 0$$

மாதிரி 3 : $x^2+y^2+2x+4y+7=0$, $x^2+y^2+4x+2y+5=0$ வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் யாவை?

வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சின் சமன்பாடு

$$2x-2y-2 = 0$$

$$(\text{அ - து.}) \quad x-y-1 = 0.$$

இவ்வட்டங்களோடு பொது ஆயமுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+2x+4y+7+\lambda(x-y-1) = 0$$

$$x^2+y^2+(2+\lambda)x+y(4-\lambda)+7-\lambda = 0$$

இவ்வட்டத்தின் ஆரை சூன்னமாயின்

$$\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)^2-(7-\lambda) = 0$$

$$1+\lambda+\frac{\lambda^2}{4}+4+\frac{\lambda^2}{4}-2\lambda-7+\lambda = 0.$$

$$-2+\frac{\lambda^2}{2} = 0. \qquad \lambda = \pm 2.$$

ஆகவே புள்ளி வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+4x+2y+5 = 0$$

$$x^2+y^2+6y+9 = 0$$

இவ்வட்டங்களின் மையங்களே எல்லைப் புள்ளிகள்.

எல்லைப் புள்ளிகள் $(-2, -1), (0, -3)$.

மாதிரி 4 : $x^2+y^2+2x+3y+1=0$, $x^2+y^2+4x+3y+2=0$ வட்டங்களின் பொது நாணினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்வட்டங்கள் A, B புள்ளிகளில் வெட்டினால்

ABயின் சமன்பாடு $2x+1=0$

$\{(x^2+y^2+4x+3y+2)-(x^2+y^2+2x+3y+1)=0\}$

A, B வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+4x+3y+2+\lambda(x^2+y^2+2x+3y+1)=0$$

இவ்வட்டம் ABஐ விட்டமாகக் கொண்டால் வட்டத்தின் மையம் ABயில் இருக்கும்.

வட்டத்தின் சமன்பாட்டினை

$$x^2+y^2+\frac{2x(2+\lambda)}{1+\lambda}+3y+\frac{2+\lambda}{1+\lambda} = 0$$

என்று எழுதலாம்.

$\therefore$ வட்டத்தின் மையம் $\left\{-\frac{(2+\lambda)}{1+\lambda},\ -\frac{3}{2}\right\}$

இப்புள்ளி $2x+1=0$ல் இருப்பதால்

$$-\frac{2(2+\lambda)}{1+\lambda}+1 = 0$$

$$-4-2\lambda+1+\lambda = 0$$

$$\lambda = -3$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+4x+3y+2-3\,(x^2+y^2+2x+3y+1) = 0$$

$$2x^2+2y^2+2x+6y+1 = 0.$$

மாதிரி 5 : மூன்று வட்டங்கள் பொது ஆயமுடைய வட்டங்கள் என்றால், ஒரு வட்டத்திலிருந்து மற்றை இரண்டிற்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் தகவு மாறாத் தன்மையதாகும்.

மையங்களை இணைக்கும் கோட்டினை x ஆயமாகவும் பொது சமத் தொடு அச்சினை y ஆயமாகவும் கொண்டால் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளை

$$x^2+y^2+2g_1x+c = 0$$

$$x^2+y^2+2g_2x+c = 0$$

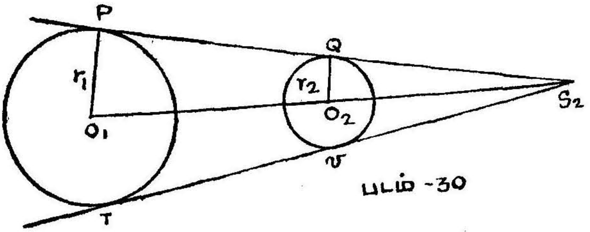
$$x^2+y^2+2g_3x+c = 0$$ எனக் கொள்ளலாம்.

முதல் வட்டத்திலிருக்கும் புள்ளி (x_1, y_1) என்றும் அதிலிருந்து ஏனை இரண்டிற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் நீளம் t_1, t_2 என்றும் கொண்டால்

$$x_1^2+y_1^2+2g_1x_1+c = 0$$

$$t_1^2 = x_1^2+y_1^2+2g_2x_1+c = 2g^2x_1-2g_1x_1$$
$$t_2^2 = x_1^2+y_1^2+2g_3x_1+c = 2g_3x-2g_1x_1$$
$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{2x_1(g_2-g_1)}{2x_1(g_3-g_1)} = \frac{g_2-g_1}{g_3-g_1} = \text{நிலையெண்.}$$

11. இருவட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோடுகள் : இவ்வட்டங்களின் மையங்கள் O_1, O_2 என்றும் ஆரைகள் r_1, r_2 என்றும் இவ்வட்டங்களின் ஒரு பொதுத் தொடுகோடு O_1 O_2 கோட்டினை S_2-ல் வெட்டும் என்றும் கொள்க.



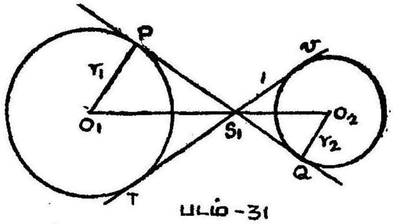
படம் -30

இங்கு S_2O_2Q, S_2O_1P வடிவொத்த முக்கோணங்களாகும்.

$$\therefore \quad \frac{S_2O_1}{S_7O_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

ஆகவே S_2, O_1O_2 கோட்டினை $r_1 : r_2$ தகவுப்படி வெளியிற் பிரிக்கும்.

$\therefore$ S_2 வெளிபோன்மை மையம் (exernal centre of similitude), மற்றைய நேர் பொதுத் தொடுகோடு (direct common tangent) TV-ம் S_2 வழிச் செல்லும் என எளிதிற்காணலாம்.



படம் -31

PQ குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடு (transverse common tangent) ஆயின் அது O_1O_2 கோட்டினை $r_1 : r_2$ தகவுப்படி உள்ளே பிரிக்கும் எனக் காணலாம்.

ஆகவே S_1 உள்போன்மைமையமும் (internal centre of similitude) ஏனை TV குறுக்குத் தொடுகோடும் S_1 வழிச் செல்லும்.

ஆகவே, இருவட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோடுகளைக் காண்பதற்கு, மையங்களை இணைக்கும் கோட்டினை ஆரைகள் தகவுப்படி உள்ளும் வெளியும் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக்கண்டு (அதாவது போன்மை மையங்களைக்கண்டு) அவற்றிலிருந்து வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளைக் காணவேண்டும்.

மாதிரி 6 : வட்டங்கள் $x^2+y^2=16$, $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ மெய்புள்ளிகளில் வெட்டும் என காண்பி. மெய்பொதுத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு $2x+y-6=0$.

இதிலும் முதல் வட்டத்திலுமுள்ள y-ஐ நீக்கிஞல்

$$x^2+(6-2x)^2=16$$

$$5x^2-24x+20=0$$

தன்மைகாட்டி (discriminant) $=(24)^2-4\cdot5\cdot20>0$.

$\therefore$ சமத்தொடு அச்சு முதல் வட்டத்தை மெய்புள்ளிகளில் வெட்டும். ஆதலால் இரண்டாவது வட்டத்தையும் மெய்புள்ளிகளில் தான் வெட்டும். ஆகவே வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று மெய்புள்ளிகளில் வெட்டும்.

முதல் வட்டத்தின் மையம் $O\ (0,\ 0)$; ஆரை $=4$

[இரண்டாவது வட்டத்தின் மையம் $C\ (2,\ 1)$; ஆரை $2=3$]

வெளிப்போன்மை மையம் (external centre of similitude) S_2, OC-ஐ $4:3$ தகவுப்படி வெளியிற் பிரிக்கும்.

$$\therefore\quad S_2\left[\frac{4\cdot2-3\cdot0}{4-3},\ \frac{4\cdot1-3\cdot0}{4-3}\right]$$

(அ - து.) $S_2(8,\ 4)$.

பொதுத் தொடுகோடுகள் $S_2\ (8,\ 4)$-லிருந்து இரண்டில் ஏதாவது ஒரு வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளாகும்.

தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு $SS_1=T^2$

$$S=x^2+y^2-16\ ;\ S_1=8^2+4^2-16=64$$

$$T=8x+4y-16.$$

$$\therefore\quad 64(x^2+y^2-16)=(8x+4y-16)^2$$

$$3y^2-4xy+16x+8y-80=0$$

$$(y-4)\ (3y-4x+20)=0$$

நேர் பொது தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$y-4=0\ ;\ 3y-4x+20=0.$$

மாதிரி 7 : $(x \pm r)^2+(y \pm r)^2=r^2$ வட்டங்களின் மையம் $(\pm r, \pm r)$ ஆகவும் ஆரம் r ஆகவும் இருப்பதால் இந்த வட்டங்கள் x, y ஆயங்களைத் தொடும் வட்டங்களாகும்.

(2, 1) வழிச்செல்லும் இம்மாதிரி வட்டங்கள் $x^2+y^2-10(x+y)+25=0$, $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ என நிரூபி.

$x^2+y^2-10(x+y)+25=0$-ஐ $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$ என்று எழுதலாம். வட்டத்தின் மையம் (5, 5) ஆகவும் ஆரம் 5 ஆகவும் இருப்பதால் வட்டம் x, y ஆயங்களைத் தொடும். (2, 1) புள்ளி $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$-ஐ திருப்திபடுத்துவதால் வட்டம் (2, 1) புள்ளிவழிச் செல்கிறது.

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$-ஐ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ என எழுதலாம். வட்டத்தின் மையம் (1, 1) ஆகவும் ஆரம் 1 ஆகவும் இருப்பதால் வட்டம் x, y ஆயங்களைத் தொடும். $(2-1)^2+(1-1)^2=1$ ஆனதால் வட்டம் (2, 1) புள்ளி வழிச் செல்லும்.

பயிற்சிகள் 5

1. $a^{-2}+b^{-2}=c^{-1}$ ஆனால் வட்டங்கள் $x^2+y^2+2ax+c=0$ $x^2+y^2+2by+c=0$ ஒன்றையொன்று தொடும் என நிறுவுக.

2. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுவதற்குரிய நிபந்தனை $(2gg'-2ff'-c-c')^2=4(g^2+f^2-c)(g'^2+f'^2-c')$ என நிறுவுக.

3. வட்டங்கள் $x^2+y^2+2x-8y+8=0$, $x^2+y^2+10x-2y+22=0$ ஒன்றையொன்று தொடும் என நிரூபி. தொடுபுள்ளியின் ஆயத் தொலைகளைக் காண். விடை : $-\frac{17}{5}, \frac{11}{5})$

4. (2, 3) புள்ளி வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் $x+y=1$ கோட்டிலுள்ளது. அவ்வட்டம் $x^2+y^2+4x+8y-5=0$ வட்டத்தை செங்கோணத்தில் வெட்டினால், வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ? விடை : $3x^2+3y^2+4x-10y-17=0$

5. $x^2+y^2-6x+8=0$, $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ வட்டங்களை செங்கோணத்தில் வெட்டிக்கொண்டு, ஆதிவழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. விடை : $3x^2+3y^2-8x+29y=0$.

6. $2x^2+2y^2-3x+5y+1=0$, $x^2+y^2=1$ வட்டங்களின் பொதுப் புள்ளிகள், (2, 1) புள்ளி இவ்வற்றின் வழிச்செல்லும் வட்டம் $x^2+y^2+6x-10y-7=0$ என நிறுவுக.

7. $x^2+y^2-3x-2y-6=0$, $x^2+y^2-5x+4y+2=0$ வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் $x=y$ கோட்டில் இருப்பின் அதன் சமன்பாடு என்ன?

விடை : $4x^2+4y^2-11x-11y-28=0$.

8. $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழி $x+2y=0$ கோட்டினைத் தொடும் சமன்பாடு காண்க.

விடை : $x^2+y^2-3x-2y+2=0$
$x^2+y^2+4y-1=0$.

9. $x^2+y^2 = a^2$; $(x-b)^2+y^2 = a^2$; $x^2+(y-c)^2=a^2$ வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-bx-cy+a^2=0$ என நிறுவுக.

10. (0, 0), (3, 1) புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டம், $x^2+y^2+8x+4y-12=0$ வட்டத்தைச் செங்கோணத்தில் வெட்டினால் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-4x+2y=0$ என்று நிறுவுக.

11. ஆதிவழி $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ வட்டத்தினைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் மையம் $x+y=4$ கோட்டில் இருப்பின், அதன் சமன்பாடு $x^2+y^2-4x-4y=0$ எனக் காண்பி.

12. $x^2+y^2+2x-4y+1=0$, $x^2+y^2-6x+8y+7=0$, $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+9x+7y-6=0$ என நிரூபி.

13. $x^2+y^2-5x-14y-34=0$ வட்டம், $x^2+y^2+2x+4y+1=0$, $2x^2+2y^2+6x+8y-3=0$, $x^2+y^2-2x+6y-3=0$ வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் என நிறுவுக.

14. $x^2+y^2+4x-22y=0$, $x^2+y^2-10x+6y=0$ வட்டங்களின் பொது நாணின் நீளம் என்ன?

15. $x^2+y^2+2x+4y+1=0$, $x^2+y^2-2x+6y-3=0$, $2x^2+2y^2+6x+8y-3=0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சுச் சந்தியைக்காண்க. இதிலிருந்து மேற்குறிப்பிட்ட வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

விடை : $(\frac{5}{2}, 7)$; $x^2+y^2-5x-14y-34=0$.

16. $x^2+y^2+2\lambda x+c=0$, $x^2+y^2+2\mu y-c=0$ வட்டங்களின் பொது நாணின் நீளம் $2\sqrt{\frac{(\lambda^2-c)(\mu^2+c)}{(\lambda^2+\mu^2)}}$ என நிறுவுக.

17. $x^2+y^2-3x-4y=0$, $x^2+y^2+x-7y=0$ வட்டங்களின் பொது நாணின் நீளம் என்ன? விடை : 5.

18. $x^2+y^2-2y-9=0$ வட்டத்தை $2x-y+6=0$ கோடு A, B-ல் வெட்டினால், AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன? விடை : $x^2+y^2+4x-4y+3=0$.

19. $2x+3y=1$ கோடு $x^2+y^2-4=0$ வட்டத்தை A, B புள்ளிகளில் வெட்டினால், AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $13(x^2+y^2)-4x-6y-50=0$ என நிறுவுக.

20. $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

விடை : $5x^2+5y^2-8x-16y+12=0$

21. $x^2+y^2+2x+4y+7=0$, $x^2+y^2+5x+y+4=0$ வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் யாவை? விடை : $(-2, -1)$, $(0, -3)$

22. $x^2+y^2+2y-4=0$, $x^2+y^2+2x+2y-10=0$ வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் யாவை? விடை : $(1, -1)$, $(5, -1)$

23. ஒரு நிலைப் புள்ளியிலிருந்து பொது ஆயமுடைய ஒருநிலை வட்டங்கள் மூன்றுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் t_1, t_2, t_3 ஆகும். இவ்வட்டங்களின் மையங்கள் முறையே A, B, C எனின் $BC\cdot t_1^2+CA\cdot t_2^2+AB\cdot t_3^2=0$ என நிறுவுக.

24. பொது ஆயமுடைய ஒரு நிலை வட்டங்களில் இரண்டின் பொதுத் தொடுகோடு எல்லைப் புள்ளியோடு கூடிச் செங்கோணத்தைப் பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.

25. ஆதியை எல்லைப் புள்ளிகளில் ஒன்றாகக் கொண்ட பொது ஆயமுடைய ஒரு நிலை வட்டங்களில் ஒன்று $x^2+y^2-8x-12y+26=0$ ஆனால், மற்றொரு எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க. விடை : $(2, 3)$

26. பொது ஆயமுடைய ஒரு நிலை வட்டங்களில் ஒன்று $x^2+y^2-2x=0$. $(4, 4)$ ஒரு எல்லைப் புள்ளியானால் மற்றொரு எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க. விடை : $\left(\frac{28}{25}, \frac{4}{25}\right)$

27. $x^2+y^2-2y-3=0$, $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ இவ்வட்டங்களின் பொதுத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு காண்க.

விடை : $x+4=\pm\sqrt{3}\,(y-1)$

28. $x^2+y^2-2x-6y+9=0$, $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ வட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு காண்க.

விடை : $x=0$, $3x+4y-10=0$,
$y=4$, $4x-3y=0$.

29. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $4x^2+4y^2-9=0$ $9x^2+9y^2-16=0$ வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் விகிதம் 3 : 4 ஆனால், அப்புள்ளியின் இயங்குவரை காண்க.

விடை : $7x^2+7y^2-20=0$.

30. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2-2x-4y-4=0$, $x^2+y^2+10x+12y+45=0$ வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் விகிதம் 3 : 4 ஆயின், அப்புள்ளியின் இயங்குவரை இவ்வட்டங்களோடும் பொது ஆயமுடைய வட்டமாகும் என நிறுவுக.

31. S வட்டத்தைச் சார்ந்த P, Q புள்ளிகள் துணை இயப் புள்ளிகளாயின் PQ-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் S-ஐ செங்கோணத்தில் வெட்டும் என நிறுவுக.

5. கூம்பின் வெட்டு முகங்கள்
(Conic Sections)

பரவளைவு (Parabola)

1. கூம்பு வெட்டிகள் (வரையறை)

ஒரு நிலைப்புள்ளி, ஒரு நிலைக்கோடு இவற்றிலிருந்து P-ன் தொலைகள் மாறு விகிதமுடையனவாக இருக்க, இயங்கும் P-ன் இயங்கு வரை ஒரு கூம்பு வெட்டி (conic section) ஆகும். நிலைப்புள்ளி குவியம் (focus) எனவும் நிலைக்கோடு இயக்குவரை (disectrix) எனவும், மாறு விகிதம் மையத் தொலை விகிதம் (eccentricity) எனவும் கூறப்படும். குவியத்தை S என்ற எழுத்தாலும், மையத் தொலை விகிதத்தை e என்ற எழுத்தாலும் குறிப்பிடுவது மரபு.

$e=1$ ஆனால் கூம்பு வெட்டி பரவளைவு (parabola) எனவும், $e<1$ ஆனால் நீள்வட்டம் எனவும் $e>1$ ஆனால் அதிபரவளைவு (hyperbola) எனவும் கூறப்படும்.

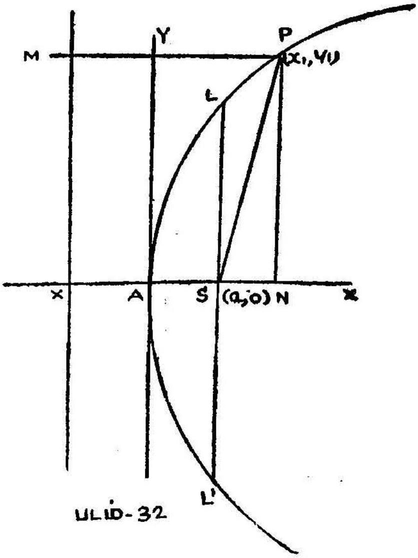
2. பரவளைவின் சமன்பாடு

குவியம் S எனவும் இயக்குவரை XM எனவும் பரவளைவின் புள்ளிகளுள் ஒன்று P எனவும் கொள்வோம்.

S-லிருந்து இயக்குவரைக்கு SX-ஐ நேர்குத்தாக வரைக.

SX-ன் நடுப்புள்ளி A ஆனால் $\dfrac{SA}{AX}=1$. ஆகவே A பரவளைவில் இருக்கும்.

P-யிலிருந்து இயக்கு வரைக்கும் AS-க்கும் முறையே PM, PN கோடுகளையும், A வழி ASக்கு AY கோட்டினையும் நேர்குத்தாக வரைக.



படம்-32

AS, AY கோடுகளை x, y ஆயங்களாக எடுத்துக் கொள்ளவும்.

P-ன் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

$AS = a$ ஆனால் S-ன் ஆயத் தொலைகள் $(a, 0)$ ஆகும்.

$$\frac{SP}{PM} = e = 1$$

$$SP^2 = PM^2$$

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = (x_1 + a)^2$$

(அ - து.) $y_1^2 = 4ax_1$

$\therefore$ P-ன் இயங்குவரை $y^2 = 4ax$

இது பரவளைவின் சமன்பாட்டின் நியம வடிவம் (standard equation) ஆகும்.

A புள்ளி பரவளைவின் முனை (vertex) எனவும் AS xஆயம் (axis) எனவும் கூறப்படும்.

x-ன் மதிப்புக் குறையாக இருப்பின் y^2-ன் மதிப்பும் அவ்வாறே இருக்குமாதலின் x-ன் குறை மதிப்புகளுக்கு y-ன் மதிப்புகள் கற்பனை ஆகும். ஆகவே முதலாவது, நான்காவது கால் வட்டங்களில், அதாவது A-ன் வலப் பக்கத்தில் வளைவரை இருக்கும்.

x-ன் மதிப்பு சூன்னமெனின் y-ன் மதிப்பும் சூன்னமாகும். ஆகவே வளைவரை x ஆயத்தை A-ல் வெட்டும். AY, A-யிடத்துத் தொடுகோடாகும்.

x-ன் மதிப்பு கந்தழி (infinity) க்குக் கூடிச் செல்லச் செல்ல y-ன் மதிப்பு அவ்வாறேயாகும்.

வளைவரையிலுள்ள ஒவ்வொரு (x, y) புள்ளிக்கும் எதிர் நிலையாக $(x, -y)$ புள்ளி வளைவரைவில் இருப்பதால் ஆயத்தோடு பரவளைவு சமச் சீருடையதாகும் (symmetrical).

3. செவ்வகலம் (Latus Rectum).

S வழிச்செல்லும் LSL' இரட்டைக்குத்தாயம் செவ்வகலம் (latus rectum) எனப்படும்.

$L(a, SL)$ பரவளைவிலுள்ள ஒரு புள்ளி.

$$SL^2 = 4a.a = 4a^2$$

$$SL = 2a$$

ஆகவே செவ்வகலம் $= LSL' = 2SL = 4a$.

4. $y=mx+c$ கோடு $y^2=4ax$ பரவளைவைத் தொடுவதற்குரிய கட்டுப்பாடு காண்க.

$$y = mx+c \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y^2 = 4ax \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

சமன்பாடு (1)லிலுள்ள y-ன் மதிப்பை (2)வது சமன்பாட்டின் yக்கு ஈடாக்கினால்

$$(mx+c)^2 = 4ax$$

$$m^2x^2+2x(mc-2a)+c^2=0 \ldots\ldots\ldots(3)$$

$y=mx+c$ தொடுகோடானால், (3)வது சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore\ 4(mc-2a)^2-4m^2c^2=0$$

$$4m^2c^2-16amc+16a^2-4m^2c^2=0$$

$$c = \frac{a}{m}.$$

$c = \frac{a}{m}$ ஆனால் $y=mx+c$ கோடு $y^2=4ax$ பரவளைவைத் தொடும்.

$y^2=4ax$ பரவளைவின் தொடுகோட்டின் சாய்வு வீதம் 'm' ஆனால் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y=mx+\frac{a}{m}$ ஆகும்.

5. $y^2=4ax$ பரவளைவின் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு.

$P(x_1, y_1)$ என்றும் அதற்கு மிக நெருங்கிய புள்ளி $Q(x_2, y_2)$ என்றும் கொள்க.

$\therefore$ PQ-ன் சமன்பாடு $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.........(1)

(x_1, y_1), (x_2, x_2) பரவளைவில் இருப்பதால்

$$y_1^2 = 4ax ; \quad y_2^2 = 4ax_2$$

$$y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$$

(அ - து.) $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{4a}{y_1 + y_2}$

இம் மதிப்பை (1)-ல் ஈடாக்கினால் PQ-ன் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$$

Q, Pயோடு நெருங்கி முடிவில் Pயோடு ஒன்றுபடுவதால்

$x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ ஆகும்.

Pயிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$$

$$yy_1 = 2ax + y_1^2 - 2ax_1$$

$$= 2ax + 4ax_1 - 2ax_1$$

$$= 2a(x + x_1)$$

Pயிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$yy_1 = 2a(x + x_1)$$

6. $S \equiv y^2 - 4ax$

$S_1 \equiv y_1^2 - 4ax_1$

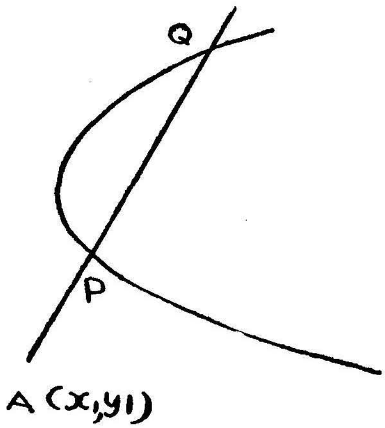
$T \equiv yy_1 - 2a(x + x_1)$ எனக் கொள்வோம்.

$P(x_1y_1)$யிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$yy_1 - 2a(x + x_1) = 0$ (அ - து.) $T = 0$

$P(x_1y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடு நாணின் சமன்பாடு $T = 0$ என்றும், பரவளைவைச் சார்ந்த $P(x_1y_1)$ என்ற புள்ளியின் இசைக்கோடு $T = 0$ என்றும் அறியலாம்.

7. (x_1, y_1) – லிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு.



படம் 33

(x_1, y_1) வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y-y_1}{\sin\theta} = r$ எனக் கொள்வோம்.

$$x = x_1 + r\cos\theta$$
$$y = y_1 + r\sin\theta$$

இக்கோடு பரவளைவை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால் AP, AQ நீளங்களைப் பின்வரும் சமன்பாட்டால் கணக்கிடலாம்.

$$(y_1 + r\sin\theta)^2 - 4a(x_1 + r\cos\theta) = 0$$

(அ - து.) $(y_1{}^2 + r^2\sin^2\theta - 2r\sin\theta y_1 - 4ax_1 + 4ar\cos\theta = 0$

$$r^2\sin^2\theta - 2r(y_1\sin\theta - 2a\cos\theta) + y_1{}^2 - 4ax_1 = 0 \quad (1)$$

இக் கோடு பரவளைவைத் தொட்டால் P, Q புள்ளிகள் ஒன்றுபடும்.

அந்நிலையில் AP, AQ நீளங்கள் சமமாகும்.

சமன்பாடு (1)க்கு இருசமதீர்வுகள் உண்டு.

$$4(y_1\sin\theta - 2a\cos\theta)^2 - 4\sin^2\theta\,(y_1{}^2 - 4ax_1) = 0 \quad (2)$$

$\cos\theta$, $\sin\theta$க்கு பதில் $\dfrac{x-x_1}{r}$, $\dfrac{y-y_1}{r}$-ஐ (2)-ல் ஈடாக்கினால் Aயி லிருந்து பரவளைவுக்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$A(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடு களின் சமன்பாடு

$$\{y_1(y-y_1)-2a(x-x_1)\}^2-(y-y_1)^2(y_1^2-4ax_1)=0$$

$$\{yy_1-2a(x+x_1)-(y_1^2-4ax_1)\}^2=(y^2+y_1^2-2yy_1)(y_1^2-4ax_1)$$

$$=\{y^2-4ax+y_1^2-4ax_1-2(yy_1-2ax+x_1)\}\times(y_1^2-4ax_1)$$

$$(T-S_1)^2=(S+S_1-2T)S_1$$

$$T^2+S_1^2-2TS_1=SS_1+S_1^2-2TS_1$$

$T^2=SS_1$ இங்கு $T=yy_1-2a(x+x_1)$

$S=y^2-4ax$

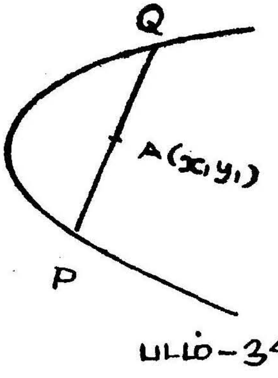
$S_1=y_1^2-4ax_1$

8. $A\,(x_1y_1)$ **புள்ளியை நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு.**

PQயின் மையப்புள்ளி A ஆனதால் $AP+AQ=0$

அதாவது சமன்பாடு (1)ன் தீர்வுகளின் மதிப்பு சுன்னமாகும்.

(அ - து.) $y_1\sin\theta-2a\cos\theta=0.$



படம்-34

$\sin\theta$, $\cos\theta$ க்கு பதில் $\dfrac{x-x_1}{r}$, $\dfrac{y-y_1}{r}$ஐ ஈடாக்கினால் $A(x_1y_1)$ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$y_1(y-y_1)-2a(x-x_1)=0$$

$$yy_1-2ax=y_1^2-2ax_1$$

$$yy_1-2a(x+x_1)=y_1^2-4ax_1$$

$$T=S_1$$

$A(x_1y_1)$ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு $T=S_1$ ஆகும்.

9. $y=mx+c$, $y^2=4ax$ **ஐத் தொடின் தொடு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.**

$y=mx+c$ பரவளைவை $P(x_1, y_1)$-ல் தொடும் எனக் கொள்வோம்.

$P(x_1y_1)$ யிடத்துச் சமன்பாடு $yy_1-2a(x+x_1)=0$

$$\left.\begin{aligned} 2ax-yy_1+2ax_1=0 \\ mx-y+c=0 \end{aligned}\right\}$$ இவை ஒரே கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{2a}{m}=y_1=\frac{2ax_1}{c}$$

$$y_1=\frac{2a}{m}; \quad x_1=\frac{c}{m}$$

(x_1, y_1) பரவளைவில் இருப்பதால் $y_1{}^2=4ax_1$

$$\frac{4a^2}{m^2}=4a\frac{c}{m} \qquad \therefore \; C=\frac{a}{m}$$

$\therefore$ P-ன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

10. ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவிற்கு இரு தொடுகோடுகள் உண்டு என்று நிறுவு.

$y^2=4ax$-ன் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y=mx+\frac{a}{m}$ எனக் கண்டோம்.

இது (x_1, y_1) வழிச் செல்லின் $y_1=mx_1+\frac{a}{m}$ ......(1)

(x_1, y_1) வழிச் செல்லும் தொடு வரைகளின் 'm'கள் இச்சமன்பாட்டால் கிடைக்கும்.

சமன்பாடு (1)ஐ $m^2x_1-my_1+a=0$ ......(2) என்று எழுதலாம். இது இருபடிச் சமன்பாடு ஆகையால் 'm' க்கு இரு மதிப்புகள் உண்டு. ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் நேர்நிலையாக ஒரு தொடுகோடு உண்டு. ஆகவே (x_1, y_1) வழி இரு தொடுகோடுகள் உண்டு.

11. பரவளைவுப் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்.

$y^2=4ax$ சமன்பாட்டில் t-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $x=at^2$, $y=2at$ பொருந்தும். ஆகவே, பரவளையத்துப் புள்ளியின் ஆயத்

தொலைகளை ஒரே மாறுராசியான (variable) t-ல் குறிப்பிட இயலும். $(at^2, 2at)$ புள்ளியை 't' எனல் மரபு. t-க்கு துணையலகு (parameter) என்று பெயர்.

12. 't' இடத்துத் தொடுகோடு.

't_1', 't_2' புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{y-2at_1}{2at_1-2at_2}=\frac{x-at_1^2}{at_1^2-at_2^2}$$

$$\frac{y-2at_1}{2at(t_1-t_2)}=\frac{x-at_1^2}{a(t_1+t_2)(t_1-t_2)}$$

$$\frac{y-2at_1}{2}=\frac{x-at_1^2}{t_1+t_2}$$

$$(y-2at_1)(t_1+t_2) = 2x-2at_1^2$$

$$y(t_1+t_2) = 2x+2at_1t_2$$

't_1' 't_2' புள்ளிகள் 't' யுடன் ஒன்றுபட்டால் 't_1' 't_2' புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாண் 't' யிடத்துத் தொடுகோடாகும்.

't' யிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y2t = 2x+2at^2$$

$$yt = x+at^2$$

18. 't' இடத்துச் செங்கோடு.

வரையறை.

't' இடத்துச் செங்கோடு $(at^2, 2at)$ வழி 't' இடத்துத் தொடுகோட்டிற்கு நேர்குத்தாகும்.

't' இடத்துத் தொடுகோட்டின் சாய்வு வீதம் $=\frac{1}{t}$

∴ 't' இடத்துச் செங்கோட்டின் சாய்வு வீதம் $=-t$

∴ 't' இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y-2at=-t(x-at^2)$$

$$y+tx=2at+at^3$$

மாதிரி 1: $(3, -4)$ஐ குவியமாகவும் $6x-7y+5=0$ஐ இயக்குவரையாகவும் கொண்ட பரவளைவின் சமன்பாடு என்ன?

பரவளைவின் மையத் தொலை விகிதம் $=1$

பரவளைவுப் புள்ளிகளுள் ஒன்று $P(x, y)$ எனக் கொள்வோம்.

$$(x-3)^2+(y+4)^2 = \left\{\frac{6x-7y+5}{\sqrt{36+49}}\right\}^2$$

$$85(x^2+y^2-6x+8y+25) = 36x^2+49y^2-84xy+60x -70y+25$$

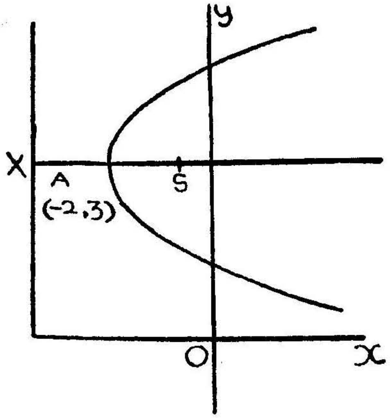
$$49x^2+84xy+36y^2-570x+750y+2100=0$$

மாதிரி 2: $y^2-2x-6y+5=0$ பரவளைவின் முனை, குவியம் இயக்குவரை இவற்றினைக் காண்க.

$$y^2-2x-6y+5=0$$

$$y^2-6y=2x-5$$

$$(y-3)^2=2(x+2)$$



படம்-35

$(-2, 3)$ புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றின், புதிய ஆயங்களைப் பொறுத்துப் பரவளைவின் சமன்பாடு $Y^2=2X$.

முனையின் ஆயத் தொலைகள் $(-2, 2)$

செவ்வகலம் $= 2$

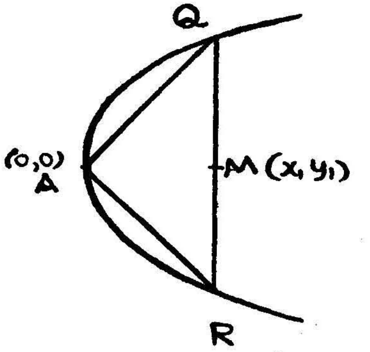
$AS = \frac{1}{2}$

S-ன் ஆயத் தொலைகள் $(-\frac{3}{2}, 3)$

இயக்குவரையின் சமன்பாடு:

$x = -\frac{5}{2}$ (அ - து). $2x+5=0$

மாதிரி 3 : $y^2=4ax$ பரவளையின் முனையில் செங்கோணத்தை உண்டுபண்ணும் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவரையைக் காண்க.



படம்-36

பரவளையின் முனை $A(0, 0)$யில் செங்கோணத்தை உண்டு பண்ணும் நாண் QRன் நடுப்புள்ளி $M(x_1, y_1)$ எனக்கொள்வோம்.

QRன் சமன்பாடு $T = S_1$

$$yy_1 - 2a(x+x_1) = y_1^2 - 4ax_1$$

$$yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$$

$$\frac{yy_1 - 2ax}{y_1^2 - 2ax_1} = 1. \qquad (1)$$

பரவளையின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax \qquad (2)$

$y^2=4ax$ சமன்பாட்டினை சமன்பாடு (1)ஆல் சமபடித்தான சமன்பாடு ஆக்கின்

$$y^2 = 4ax\left(\frac{yy_1 - 2ax}{y_1^2 - 2ax_1}\right)$$ என வரும்.

இது AQ, AR கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$Q\hat{A}R = 90°$.

$\therefore$ x^2ன் கெழு $+ y^2$ன் கெழு $= 0$.

$$1 + \frac{8a^2}{y_1^2 - 2ax_1} = 0.$$

$M(x_1\ y_1)$ன் இயங்குவரை $y^2 - 2ax + 8a^2 = 0$.

$$y^2 = 2a(x - 4a).$$

மாதிரி 4 : $y^2=4ax$ பரவளேவின் 't_1' இடத்துச் செங்கோடு பரவளேவை 't_2' புள்ளியில் மீண்டும் வெட்டினுல் $t_2=-t_1-\frac{2}{t_1}$ என நிறுவுக.

't_1', 't_2' புள்ளிகளேச் சேர்க்கும் கோட்டின்

சமன்பாடு $y(t_1+t_2) = 2x+2at_1 t_2$ (1)

பரவளேவு $y^2=4ax$ன் 't_1' இடத்துச் செங்கோட்டின்

சமன்பாடு $y+t_1x = 2at_1+at_1^3$ (2)

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ம் ஒரே கோட்டைக்

குறிப்பதால் $\frac{t_1+t_2}{1} = -\frac{2}{t_1}$

$$\therefore \quad t_2 = -t_1-\frac{2}{t_1}$$

14. பரவளேவின் மூன்று செங்கோடுகள் குறித்த புள்ளி வழிச் செல்லும்.

குறித்த புள்ளியை (h, k) எனக்கொள்க.

't' இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$y+tx = 2at+at^3$.

இச்செங்கோடு (h, k) புள்ளி வழிச்செல்லுவதால்

$k+th = 2at+at^3$.

(அ - து.) $at^3+t(2a-h)-k = 0$. (1)

இது முப்படிச் சமன்பாடு ஆகையால், இதற்கு மூன்று தீர்வுகள் உண்டு. அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் எதிர் நிலேயாக (h, k) வழி ஒரு செங்கோடு செல்லும். எனவே (h, k) வழி மூன்று செங்கோடுகள் செல்லும்.

சமன்பாடு (1)ன் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3 என்றுல் 't_1', 't_2', 't_3' இடத்துச் செங்கோடுகள் (h, k) வழிச்செல்லும்.

$$t_1+t_2+t_3 = -\frac{t^2\text{ன் கெழு}}{t^3\text{ன் கெழு}} = 0.$$

$$t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1 = \frac{\text{'}t\text{'ன் கெழு}}{\text{'}t^3\text{'ன் கெழு}} = \frac{2a-h}{a}$$

$$t_1t_2t_3 = \frac{k}{a}.$$

't_1', 't_2' 't_3' புள்ளிகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் திணிவு மையத்தின் (centroid)

$$y \text{ ஆயத்தொலை} = \frac{2at_1+2at_2+2at_3}{3} = 0.$$

∴ திணிவு மையம் x ஆயத்தில் அதாவது பரவளையின் ஆயத்தில் இருக்கும்.

15. $y^2=4ax$ பரவளையை ஒரு வட்டம் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும் எனவும் அப்புள்ளிகளின் குத்தாயங்களின் கூட்டுத் தொகை சூன்னம் எனவும் நிறுவுக.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனக் கொள்வோம்.

இந்த வட்டம் $y^2=4ax$ பரவளையை $P(t)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டினால், $P(at^2, 2at)$ புள்ளி வட்டத்திலிருக்கும்.

$$\therefore\ a^2t^4+4a^2t^2+2gat^2+2f\cdot 2at+c = 0$$

$$a^2t^4+2at^2(2a+g)+4aft+c = 0.$$

இது நாற்படிச் சமன்பாடு. ஆகையால் வட்டம் பரவளையை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3, t_4 என்றால்

$$t_1+t_2+t_3+t_4 = 0$$

$$2at_1+2at_2+2at_3+2at_4 = 0.$$

எனவே வட்டம் பரவளையை வெட்டும் புள்ளிகளின் குத்தாயங்களின் கூட்டுத்தொகை சூன்னமாகும்.

மாதிரி 5 : ஒரு வட்டம் பரவளையை P, Q, R, S புள்ளிகளில் வெட்டினால் பரவளையின் ஆயத்தோடு PQ, RS சமச்சாய்வுடையன எனக்காண்பி.

P, Q, R, S புள்ளிகள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனின்

$$t_1+t_2+t_3+t_4=0 \ \dots\dots\dots(1)$$

PQ-ன் சமன்பாடு $y(t_1+t_2) = 2x+2at_1t_2$

RS-ன் சமன்பாடு $y(t_3+t_4) = 2x-2at_3t_4$

PQ-ன் சாய்வு வீதம் $\dfrac{2}{t_1+t_2}$

RS-ன் சாய்வு வீதம் $\dfrac{2}{t_3+t_4}$

$t_1+t_2= -(t_3+t_4)$ ஆதலின்

PQ-ன் சாய்வு வீதம் $= -RS$-ன் சாய்வு வீதம்

∴ PQ, RS கோடுகள் ஆயத்தோடு சமகோணத்தைப் பிறப்பிக்கும்.

16. பரவளைவின் ஒருபோகு நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள் தம் இயங்குவரை பரவளைவின் ஆயத்துக்கு ஒருபோகான கோடாகும்.

$y=mx$ கோட்டுக்கு ஒருபோகான நாணின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

இந்நாணின் சமன்பாடு $yy_1-2ax=y_1^2-2ax_1$

இந்நாண் $y=mx$-க்கு ஒருபோகாகையால்

$$m = \frac{2a}{y_1}$$

$$(அ\text{-}து.)\ y_1 = \frac{2a}{m}.$$

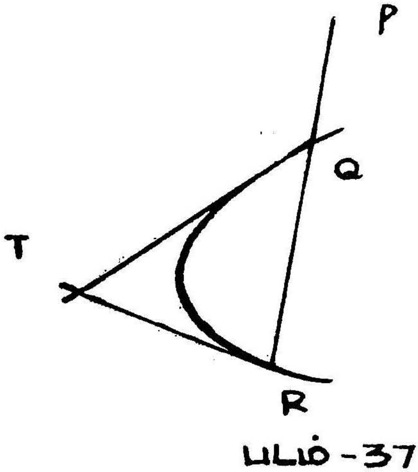
$$(x_1, y_1)\text{-ன் இயங்குவரை } y = \frac{2a}{m}.$$

இது பரவளைவின் ஆயத்துக்கு ஒருபோகான கோடாகும்.

பரவளைவின் ஆயத்துக்கு ஒரு போகான கோடு பரவளைவின் விட்டம் (**diameter**) எனப்படும்.

17. $y^2=4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த (x_1, y_1)-ன் இசைக் கோடு.

நிலைப்புள்ளி P வழிச் செல்லும் கோடு பரவளைவை Q, R புள்ளிகளில் வெட்டும் எனவும், Q, R இடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி T எனவும் கொள்வோம்.



படம் -37

T-ன் இயங்குவரை P-ன் இசைக்கோடாகும்.

T-ன் ஆயத்தொலைகள் (h, k) எனக்கொள்வோம்.

T-யிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண் QR ஆனதால், QR-ன் சமன்பாடு $yk=2a(x+h)$ ஆகும்.

இக்கோடு (x_1, y_1) வழி செல்வதால் $y_1k=2a(x_1+h)$.

$\therefore$ (h, k)-யின் இயங்குவரை அதாவது

(x_1, y_1)-ன் இசைக்கோடு $yy_1=2a(x+x_1)$ ஆகும்.

துணைத்தேற்றம் : குவியத்தின் இசைக்கோடு இயக்குவரையாகும்.

குவியத்தின் ஆயத்தொலைகள் $(a, 0)$

$(a, 0)$-ன் இசைக்கோடு $y\cdot 0=2a(x+a)$

(அ - து.) $x+a=0$.

$x+a=0$ இயக்குவரையின் சமன்பாடாகும்.

எனவே குவியத்தின் (S-ன்) இசைக்கோடு இயக்குவரையாகும்.

18. P-ன் இசைக்கோடு Q வழிச்செல்லின் Q-ன் இசைக்கோடு P-வழிச் செல்லும்.

P, Q புள்ளிகள் (x_1, y_1) (x_2, y_2) என்றும் பரவளைவு $y^2=4ax$ என்றும் கொள்வோம்.

P-ன் இசைக்கோடு $yy_1=2a(x+x_1)$.

இக்கோடு Q (x_2, y_2) வழிச் சென்றால் $y_2y_1=2a(x_2+x_1)$ என்றாகும்.

ஆகவே (x_1y_1) புள்ளி $yy_2=2a(x+x_2)$-ல் இருக்கும்.

அதாவது P, Q-ன் இசைக்கோட்டில் இருக்கும்.

19. $y^2=4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த ஒரு கோட்டின் இசைப் புள்ளி.

$Ax+By+C=0$ ....(1) எனும் கோட்டின் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) ஆக இருக்கட்டும்.

(x_1, y_1)-ன் இசைக்கோடு $yy_1=2a(x+x_1)$ ....(2) ஆகும்.

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே நேர்கோட்டைக் குறிப்பதால்

$$\frac{A}{2a}=\frac{B}{-y_1}=\frac{C}{2ax_1}$$ என்றாகிறது.

$$\therefore \quad x_1=\frac{C}{A},\ y_1=-\frac{2aB}{A}$$

$\therefore$ $Ax+By+C=0$ கோட்டின் இசைப்புள்ளி $\left(\frac{C}{A}, -\frac{2aB}{A}\right)$.

20. துணையியப் புள்ளிகள் :

பரவளைவைச் சார்ந்த P-ன் இசைக்கோடு Q வழிச் சென்றால், Q-ன் இசைக்கோடு P வழிச் செல்லும் என அறிவோம். P, Q ஆகிய புள்ளிகளை பரவளைவைச் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகள் என்போம்.

(x_1, y_1), (x_2, y_2) துணையியப் புள்ளிகளானால் (x_1, y_1)-ன் இசைக் கோடு $yy_1 = 2a(x+x_1)$, (x_2, y_2)-வின் வழிச் செல்லவேண்டும்.

இதற்குரிய கட்டுப்பாடு $y_1y_2 = 2a(x_1+x_2)$ ஆகும்.

21. துணையியக்கோடுகள் :

பரவளைவைச் சார்ந்த கோடு p-யின் இசைப்புள்ளி கோடு q-வில் அமைந்தால், q-வின் இசைப்புள்ளி pயில் அமையும். p, q எனும் கோடுகளைப் பரவளைவைச் சார்ந்த துணையியக் கோடுகள் எனலாம்.

p, q இவற்றின் சமன்பாடு $l_1x+m_1y+n_1=0$ $l_2x+m_2y+n_2=0$ எனக் கொள்வோம்.

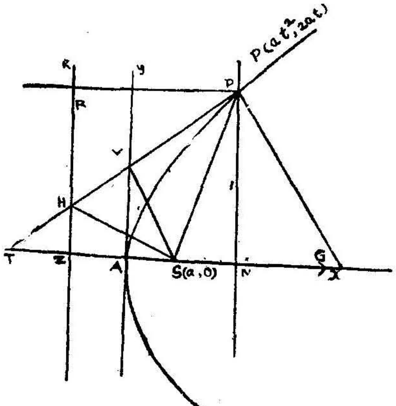
$l_1x+m_1y+n_1=0$-வின் இசைப்புள்ளி $\left(\frac{n_1}{l_1}, -\frac{2am_1}{l_1}\right)$ ஆகும்.

இப்புள்ளி $l_2x+m_2y+n_2=0$-ல் இருக்கவேண்டிய கட்டுப்பாடு

$$l_2\frac{n_1}{l_1} - m_2\frac{2am_1}{l_1} + n_2 = 0$$

(அ - து.) $l_2n_1+l_1n_2 = 2am_1m_2$.

22. பரவளைவின் பண்புகள் :



படம்-38

Ax, Ay, x, y அச்சுகளாகும்.

PT என்பது P-யிடத்து வரையும் தொடுகோடு.

PN-என்பது Pயிலிருந்து x அச்சுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு.

படத்தில் பரவளையின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$ எனக்கொள்வோம்.

குவியம் $S(a, 0)$. A-பரவளையின் முனை.

இயக்குவரை kk', $x+a=0$ ஆகும்.

$$SR = PR \quad \text{(வரையறை)}$$

பரவளையின் P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(at^2, 2at)$

(1) A தொடுகோட்டடி (Sub-tanjent) TN-ஐ சமமாகப் பிரிக்கும்.

(அ - து.) $TA = TN$.

PT-யின் சமன்பாடு $yt = x+at^2$

T புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(-at^2, 0)$

N புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(at^2, 0)$

$\therefore$ $TA = AN$.

ஆகவே P-ன் தொடுகோட்டடியை (sub-tangent) A சமமாகப் பிரிக்கும்.

(2)
$$\begin{aligned} ST &= SA+AT \\ &= a+at^2 \\ &= a(1+t^2) \\ SP &= \sqrt{(at^2-a)^2+(2at)^2} \\ &= a\sqrt{t^4+1-2t^2+4t^2} \\ &= a\,(1+t^2) \end{aligned}$$

$\therefore$ $ST = SP$

(3) PT, y ஆயத்தை V எனும் புள்ளியில் வெட்டினால் PTக்கு SV செங்குத்தாகும்.

PT-யின் சமன்பாடு $yt = x+at^2$.

V-யின் ஆயத் தொலைகள் $(0, at)$

SV-ன் சமன்பாடு $\dfrac{y-at}{0-at} = \dfrac{x-0}{a-0}$

(அ - து.) $y = +at-xt$

$\therefore$ SV-ன் சாய்வு வீதம் $= -t$

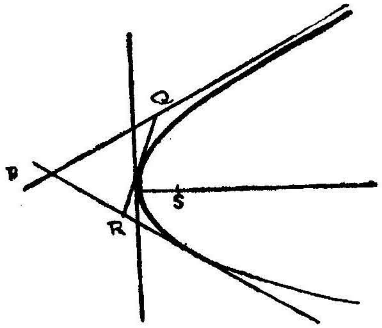
TP-ன் சாய்வு வீதம் $= \dfrac{1}{t}$

இவ்விரு கோடுகளின் சாய்வு வீதப் பெருக்குத்தொகை

$$= -t \cdot \frac{1}{t} = -1$$

$\therefore$ PTக்கு SV செங்குத்தாகும்.

(4) ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் பரவளைவைத்தொடின் அதன் சுற்று வட்டம் குவியத்தின் வழிச் செல்லும்.



படம் - 39

(3)வது பண்பின்படி குவியத்திலிருந்து தொடுகோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்தின்படி y-ஆயத்தில் முடியும்.

$\therefore$ PQ, QR, RP இவற்றிற்கு குவியம் Sலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் (y-ஆயத்தில்) அமைவதால் PQR-ன் சுற்றுவட்டம் குவியத்தின் வழிச் செல்லும். சிம்சன்கோடு தேற்றத்தின் மறுதலை (converse of pedal line theorem).

(5) $PSH = 90°$.

H-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(-a, \dfrac{-a+at^2}{t}\right)$

S-ன் ஆயத்தொலைகள் $(a, 0)$

$$HS\text{-ன் சாய்வு வீதம் } m_1 = \frac{a(t^2-1)}{t(-a-a)}$$

$$= \frac{1-t^2}{2t}$$

P-ன் ஆயத்தொலைகள் $(at^2, 2at)$

$$SP\text{-ன் சாய்வு வீதம் } m_2 = \frac{2at}{at^2-a}$$

$$= \frac{2t}{t^2-1}$$

$$\therefore m_1 m_2 = \frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{2t}{t^2-1} = -1$$

$\therefore$ **$PSH = 90°$.**

(6) அடிச் செங்கோடு (Sub-normal) மாறிலியாகும்.

PGன் சமன்பாடு $y + xt = 2at + at^3$

G-யின் ஆயத்தொலைகள் $(2a + at^2, 0)$

அடிச் செங்கோடு $NG = AG - AN$

$= 2a + at^2 - at^2$

$= 2a.$

$=$ பாதி செவ்வகலம்.

$=$ மாறிலி.

(7) தம்முள் நேர் குத்தான தொடுகோடுகள் இயக்குவரையில் வெட்டும்.

't_1', 't_2' $=$ இடத்துத் தொடுகோடுகள்

$yt_1 = x + at_1.$

$yt_2 = x + at_2.$

இவை தம்முள் நேர்குத்தாக இருப்பின் $\frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{t_2} = -1.$

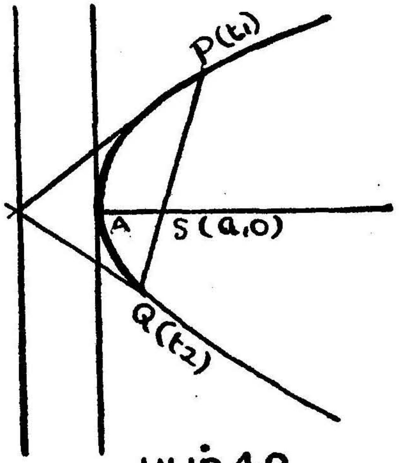
(அ - து.) $t_1 t_2 = -1.$

தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $\{at_1t_2, a(t_1 + t_2)\}$

(அ - து.) $\{-a, a(t_1 + t_2)\}$

அப்புள்ளி $x + a = 0$ அதாவது இயக்குவரையில் இருக்கும்.

(8) குவிய நாண் (focal chord) நுனிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் இயக்குவரையில் வெட்டும்.



படம் 40

P, Q புள்ளிகளை 't_1', 't_2' எனக் கொள்வோம்.

P, Q-ன் சமன்பாடு $y(t_1+t_2)=2x+2at_1t_2$

PQ, S வழிச் செல்வதால்

$$0 = 2a+2at_1t_2$$

$$\therefore\ t_1t_2 = -1$$

P, Q இடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

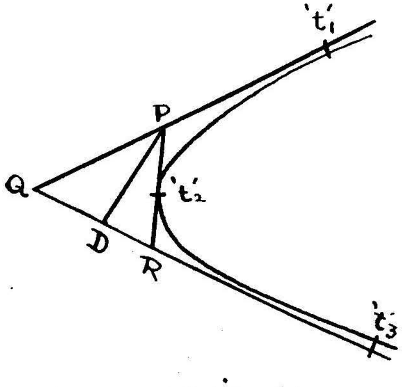
$$\{at_1t_2,\ a(t_1+t_2)\}$$

அதாவது $\{-a,\ a(t_1+t_2)\}$

இப்புள்ளி $x+a=0$-ல் இருக்கும்.

$\therefore$ வெட்டும் புள்ளி இயக்குவரையில் உள்ளது.

(9) பரவளைவின் மூன்று தொடுகோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் இயக்குவரையில் அமையும்.



படம்–41

't_1', 't_2', 't_3' புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளால் அமைந்த முக்கோணம் PQR எனக் கொள்வோம்.

P-ன் ஆயத்தொலைகள் $\{at_1t_2,\ a(t_1+t_2)\}$

QR-ன் சமன்பாடு $yt_3=x+at_3^2$

QR-ன் சாய்வு வீதம் $=\dfrac{1}{t_3}$

$\therefore$ Pலிருந்து QRக்கு வரையும் PD நேர்குத்துக் கோட்டின் சாய்வு வீதம் $=-t_3$

$\therefore$ PD-ன் சமன்பாடு

$$y-a(t_1+t_2)=-t_3(x-at_1t_2)$$

(அ - து.) $y+xt_3=a(t_1+t_2)+at_1t_2t_3$.........(1)

இம் மாதிரியே Qலிருந்து PRக்கு வரையும் நேர்குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y = -a(t_1+t_3) = -t_2(x - at_1t_3)$$

(அ - து.) $$y + xt_2 = a(t_1+t_3) + at_1t_2t_3) \ldots\ldots\ldots(2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவித்தால்

$$x = -a,\ y = a(t_1+t_2+t_3) + at_1t_2t_3$$

∴ செங்கோட்டு மையத்தின் ஆயத்தொலைகள்

$$\{-a,\ a(t_1+t_2+t_3) + at_1t_2t_3\}$$

எனவே செங்கோட்டு மையம் $x+a=0$ கோட்டில் அதாவது இயக்குவரையில் அமையும்.

பயிற்சிகள்–6

1. கீழ்க்கண்ட பரவளைவுகளின் முனை, குவியம், இயக்குவரை ஆகியவற்றைக் காண்க :

(i) $y^2+4x-2y+3=0$

(ii) $x^2-4x-5y-1=0$

(iii) $4x^2+4x+8y-15=0$

(iv) $(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}(x+y-1)^2$

விடை : (i) $(-\frac{3}{4}, 0)$, $(-\frac{7}{4}, 1)$, $4x=1$

(ii) $(2, -1)$, $(2, \frac{1}{4})$ $4y+9=0$

(iii) $(-\frac{1}{2}, 2)$ $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ $2y-5=0$

(iv) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ $(1, 2)$ $x+y-1=0$

2. (3, 4)-ஐ குவியமாகவும், $2x-3y+5=0$-ஐ இயக்குவரையாகவும் கொண்ட பரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

விடை : $9x^2+12xy+4y^2-98x-74y+300=0$

3. இயக்குவரையிலிருக்கும் புள்ளிகளிலிருந்து பரவளைவிற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணம் என நிறுவுக.

4. S வழிச் செல்லும் நாண் P இடத்துத் தொடுகோட்டிற்கு ஒரு போகாக இருப்பின் நாணின் நீளம் $4SP$ என நிறுவுக.

5. $y^2=4ax$ பரவளைவிற்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் மாறிலியான 'α' எனின், புள்ளியின் இயங்குவரை $y^2-4ax=\tan^2\alpha\,(x+a)^2$ என நிறுவுக.

6. $y^2=4ax$ பரவளைவில் தம்முள் நேர்குத்தான செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை சமன்பாடு காண்க.

விடை : $y^2=a(x-3a)$

7. பரவளைவின் முனையிடத்துச் செங்கோணம் உண்டுபண்ணும் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவரையினைக் காண்க. இந் நாண்களனைத்தும் பரவளைவின் ஆயத்தில் ஒரு நிலைப்புள்ளி வழிச் செல்லு மென நிறுவுக. விடை : $y^2=2a(x-4a)$

8. $y=mx+c$ கோடு $y^2=4a(x+a)$ பரவளைவை தொடுதற்குரிய நிபந்தனை என்ன ? விடை : $c=am+\frac{a}{m}$

9. $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ வட்டத்தைத் தொடும் $y^2=4ax$ பரவளைவின் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை காண்க.

விடை : $(2a+2y+y^2-2ax)^2=9(4a^2+y^2)$

10. $lx+my+n=0$ கோடு $y^2=4ax$ பரவளைவிற்குச் செங்கோடானல் $al^2+2alm^2-nm^2$ என நிறுவுக.

11. $x=at+bt^2$; $y=ct+dt^2$ சமன்பாடுகள் ஒரு பரவளைவைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக. இப் பரவளைவில் துணையலகு 't_1', 't_2' புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x & y & t_1t_2 \\ a & c & t_1+t^2 \\ b & d & -1 \end{vmatrix} = 0$$

எனக் காண்பி.

12. $y^2+4bx=0$ பரவளைவுத் தொடுகோடு ஒன்று $y^2=4ax$ பரவளைவை P, Q-ல் வெட்டின், PQ-ன் நடுப்புள்ளியின் இயங்குவரை $y^2(2a+b)=4a^2x$ என நிறுவுக.

13. இயக்குவரையிலிருந்து $y^2=4ax$ பரவளைவிற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை $y^2(2x+a)=a(3x+a)^2$ என நிறுவுக.

14. இரு தொடுகோடுகள் ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை மாருததாயின், அத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை குவியம் வழிச் செல்லும் ஒரு கோடென நிறுவுக.

15. P-லிருந்து $y^2=4ax$க்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள், முனையிடத்துத் தொடுகோடு இவற்ருல் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு k^2 எனின், P-ன் இயங்குவரை $x^2(y^2-4ax)=4k^2$ என நிறுவுக.

16. $y^2=4ax$ பரவளேவின் P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு பரவளேவை மீண்டும் Q-லும், PQ-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் பரவளேவை R-லும் வெட்டினுல், QR-ன் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $y^2(y^2-4ax)+64a^4=0$ என நிறுவுக.

17. 't_1' 't_2' 't_3' புள்ளிகளிடத்துப் பரவளேவின் செங்கோடுகளால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{a^2}{2}(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)(t_1+t_2+t_3)^2$ என நிறுவுக.

18. $y^2=4ax$ பரவளேவின் தொடுகோடுகளுக்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோட்டடிகளின் இயங்குவரை $x(x^2+y^2)+ay^2=0$ என நிறுவுக.

19. $lx+my+na=0$ கோடு $y^2=4ax$ பரவளேவை P, Q புள்ளிகளிலும், P, Q புள்ளிகளேக் குவியத்தோடு இணைத்து நீட்ட அவை மீண்டும் பரவளேவை R, T புள்ளிகளிலும் வெட்டின் RT-ன் சமன்பாடு $nx-my+la=0$ என நிறுவுக.

20. $y^2=4ax$ பரவளேவின் A, B, C புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (h, k)-ல் வெட்டினுல், முக்கோணம் ABC-யின் செங்கோட்டு மையம் $\left(h-6a, -\frac{k}{2}\right)$ என நிறுவுக.

21. $y^2=4ax$ பரவளேவின் தொடுகோடுகளின் $x^2=4by$-ஐச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகள் இயங்குவரையினைக் காண்க. விடை: $y^2=4\frac{b^2}{a}x$

22. ஒரு நிலேப்புள்ளி வழிச் செல்லும் பரவளேவு நாண்களின் நடுப் புள்ளிகள் தம் இயங்குவரை பிறிதொரு பரவளேவென நிறுவுக.

23. பரவளேவு விட்டத்தின் நுனியிடத்துத் தொடுகோடு, அவ் விட்டம் சமமாகப் பிரிக்கும் நாண்களுக்கு ஒரு போகாகும் என நிறுவுக.

24. $y^2=4ax$ பரவளேவின் செங்கோட்டு நாண்கள் தம் இசைப் புள்ளிகளின் இயங்குவரை $y^2(x+2a)+4a=0$ என நிறுவுக.

25. $x^2+y^2=c^2$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடுகளின் $y^2=4ax$ஐச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகளின் இயங்குவரையைக் காண்க.

விடை: $4a^2x^2-c^2y^2=4a^2c^2$

26. $y^2=4ax$ பரவளேவு முனையிடத்துச் செங்கோணம் பிறப்பிக்கும் நாண்களின் இசைப் புள்ளிகள் இயங்குவரை $x+4a=0$ என நிறுவுக.

27. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுச் செங்கோட்டு நாண்களின் நடுப் புள்ளிகள் இயங்குவரையினைக் காண்க. விடை : $\frac{y^2}{2a} + \frac{4a^3}{y^2} = x - 2a$.

28. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த P புள்ளியின் இசைக்கோடு $y^2 = 4ax$-ஐத் தொடின், P புள்ளி $y^2 + ax = 0$-ல் இருக்குமென நிறுவுக.

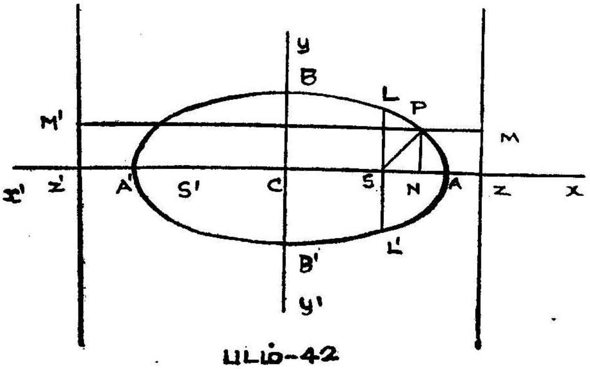
29. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் $2l$ நீளமுடைய நாண்களின் நடுப் புள்ளிகள் இயங்குவரை $(y^2 + 4a^2)(4ax - y^2) = 4a^2l^2$ என நிறுவுக.

30. $x^2 + y^2 - 2ax - 3a^2 = 0$ வட்டத்தைச் சார்ந்த P புள்ளியின் இசைக்கோடு $y^2 = 4ax$-ஐத் தொடின், P புள்ளி $x^2 + y^2 + 2ax - 3a^2 = 0$ வட்டத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

6. நீள்வட்டம்
(Ellipse)

1. ஒரு கூம்பு வெட்டியின் மையத் தொலை விகிதம் (eccentricity) $e<1$ எனின், அதனை நீள்வட்டம் என வரையறுத்தோம்.

2. நீள்வட்டத்தின் திட்டச் சமன்பாடு.



படம்-42

குவியம் S எனவும் இயக்குவரை ZM எனவும் கொள்க. SZ, இயக்குவரை ZMக்கு நேர்குத்தாக வரைக. SZஐ $e:1$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமும் வெளிப்புறமும் A, A' என்ற புள்ளிகளால் பிரித்து, AA'-ன் மையப் புள்ளியை C எனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{SA}{AZ} = \frac{SA'}{A'Z} = e\ (<1)$$

$\therefore$ A, A' நீள்வட்டத்தின் மேல் அமையும்.

$AA' = 2a$ எனக் கொள்க.

$$SA = eAZ$$
$$SA' = eA'Z$$

$$\therefore\ SA+SA' = e(AZ+A'Z)$$
$$(\text{அ-து.})\ AA' = e(CZ-CA+A'C+CZ)$$
$$(\text{அ-து.})\ 2a = e\ .\ 2CZ$$
$$\therefore\ CZ = \frac{a}{e}$$
$$SA'-SA = e(A'Z-AZ)$$
$$(\text{அ-து})\ (A'C+CS)-(CA-CS) = eAA'$$
$$(\text{அ-து.})\ 2CS = e\ .\ 2a$$
$$\therefore\ CS = ae$$

C-ஐ ஆதியாகவும், $A'CA$ஐ x ஆயமாகவும் C வழி $A'CA$-க்கு செங்குத்தான கோட்டினை y ஆயமாகவும் கொள்க.

P எனும் நீள் வட்டத்துப் புள்ளிகளுள் ஒன்றின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) ஆக இருக்கட்டும்.

$\therefore$ S-ன் ஆயத் தொலைகள் $(ae, 0)$

$$PM = NZ$$
$$= CZ-CN$$
$$= \frac{a}{e}-x_1$$

P நீள்வட்டத்தில் அமைவதால் $\frac{SP}{PM} = e$

$$\therefore\ SP^2 = e^2PM^2$$
$$(\text{அ-து.})\ (x_1-ae)^2+y_1^2 = e^2\left(\frac{a}{e}-x_1\right)^2$$
$$(\text{அ-து.})\ x_1^2-2aex+a^2e^2+y_1^2 = a^2-2aex_1+e^2x_1^2$$
$$(\text{அ-து.})\ x_1^2(1-e^2)+y_1^2 = a^2(1-e^2)$$
$$(\text{அ-து.})\ \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

$b^2 = a^2(1-e^2)$ எனக் கொள்க.

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$\therefore$ P-ன் இயங்கு வரை, அதாவது நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ஆகும்.

இது நீள்வட்டத்தின் திட்டச் சமன்பாடு (**Standard equation**) ஆகும்.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. நீள்வட்டம் வரைதல்.

இச்சமன்பாட்டில் $y=0$ எனக் கொண்டால்,

$$x = \pm a$$

$\therefore$ நீள்வட்டம் $(a, 0)$, $(-a, 0)$ புள்ளிகள் அதாவது A, A' வழிச் செல்லும். A, A' புள்ளிகள் நீள்வட்டத்தின் முனைகள் (vertices) எனப்படும்.

சமன்பாட்டில் $x=0$ எனின் $y=\pm b$

$\therefore$ நீள்வட்டம் $(0, b)$, $(0, -b)$ புள்ளிகள் அதாவது B, B' புள்ளிகள் வழிச் செல்லும்.

$AA'=2a$ நீள்வட்டத்தின் பேரச்சு (Major axis) எனவும் $BB'=2b$ நீள்வட்டத்தின் சிற்றச்சு (Minor axis) எனவும் கூறப்படும்.

நீள்வட்டத்தின் திட்டச் சமன்பாடு x, y ஆயங்களோடு சமச்சீர் உடையதாயிருப்பதால், (x, y) புள்ளி நீள் வட்டத்திலிருப்பின் $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ புள்ளிகளும் நீள்வட்டத்திலிருக்கும்.

(x, y), $(-x, -y)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு ஆதி வழிச் செல்வதால், C வழிச் செல்லும் நாண்கள் அனைத்தையும் C சமமாகப் பிரிக்கும். C நீள்வட்டத்தின் மையம் எனப்படும்.

மேலும் C-ன் மறுபுறத்தில் $S'(-ae, 0)$ குவியமும், $x=-\frac{a}{e}$ என்ற மற்றோர் இயக்குவரை $Z'M'$-ம் இருக்கவேண்டும் என்றுகிறது.

4. செவ்வகலம் (Latus-Rectum) குவியம் வழிச் செல்லும் இரட்டைக் குத்தாயம் செவ்வகலம் எனப்படும். LSL' செவ்வகலம் எனக் கொள்ளின்

$$\begin{aligned} LSL' &= 2 . SL \\ &= 2 . e . SZ \\ &= 2e . (CZ-CS) \\ &= 2e\left(\frac{a}{e}-ae\right) \\ &= 2a(1-e^2) \\ &= 2 . \frac{b^2}{a} \end{aligned}$$

$\therefore$ அரை செவ்வகலம் $=\frac{b^2}{a}$

5. $SP + S'P = 2a$

$$SP = e \cdot PM = e \cdot (CZ - CN)$$
$$= e\left(\frac{a}{e} - x\right)$$
$$= a - ex$$
$$S'P = eP'M = eNZ'$$
$$= e(CZ' + CN)$$
$$= e\left(\frac{a}{e} + x\right)$$
$$= a + ex$$

$\therefore SP + S'P = 2a =$ பேரச்சின் நீளம்

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **நீள்வட்டத்தின் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு.**

$P(x_1, y_1)$ என்றும் அதற்கு மிக நெருங்கிய புள்ளி $Q(x_2 y_2)$ என்றும் கொள்வோம்.

$\therefore$ PQன் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \qquad (1)$$

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ நீள்வட்டத்திலிருப்பதால்

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

(3)ஐ (2)லிருந்து கழிப்பின்

$$\frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} + \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} = 0$$

(அ-து.) $$\frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} + \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} = 0$$

(அ-து.) $$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

இம்மதிப்பை (1)ல் ஈடாக்கின் PQன் சமன்பாடு

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1)$$

Q, Pயோடு நெருங்கி இறுதியில் அதனோடு ஒன்றுபடுவதால் P இடத்துத் தொடுகோடு கிடைக்கும். $x_2=x_1$, $y_2=y_1$ எனக் கொள்ள வேண்டும்.

P இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y-y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

$$(\text{அ-து.})\ a^2y_1(y-y_1) = -b^2x_1(x-x_1)$$

$$(\text{அ-து.})\ b^2xx_1+a^2yy_1 = b^2x_1^2+a^2y_1^2$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$$

$P(x_1y_1)$ இடத்துத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2} = 1$$

7. (x_1, y_1)-லிருந்து $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$க்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு.

$A(x_1\ y_1)$ வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r\ldots\ldots(1)$$

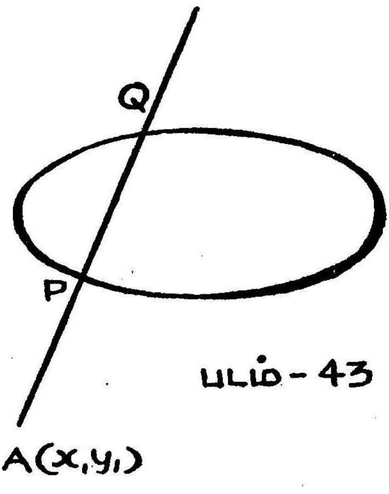
எனக் கொள்வோம்.

$$x = x_1+r\cos\theta$$

$$y = y_1+r\sin\theta$$

இப்புள்ளி நீள் வட்டத்திலிருப்பின்

$$\frac{(x_1+r\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(y_1+r\sin\theta)^2}{b^2} = 1$$



படம்-43

$$(\text{அ - து.})\ r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)$$

$$+2r\left(\frac{x_1\cos\theta}{a^2}+\frac{y_1\sin\theta}{b^2}\right)$$

$$+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0\ldots\ldots(2)$$

கோடு (1) நீள் வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டின் AP, AQ. நீளங்கள் சமன்பாடு (2)ன் தீர்வுகளாகும். இக்கோடு நீள்வட்டத்தைத்

தொடின் P, Q புள்ளிகள் ஒன்றுபடும். AP, AQ நீளங்கள் சமமாகும். சமன்பாடு (2)ன் தீர்வுகள் சமமாயிருப்பதற்குரிய நிபந்தனை

$$\left(\frac{x_1\cos\theta}{a^2}+\frac{y_1\sin\theta}{b^2}\right)^2=\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\left(\frac{x_1^{\,2}}{a^2}+\frac{y_1^{\,2}}{b_2}-1\right) \quad \ldots\ldots(3)$$

$\cos\theta$, $\sin\theta$-க்குப் பதில் முறையே $\frac{x-x_1}{r}$, $\frac{y-y_1}{r}$ஐ (3)ல் ஈடாக்கின் $A(x_1, y_1)$லிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$A(x_1\ y_1)$ புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$\left\{\frac{x_1(x-x_1)}{a^2}+\frac{y_1(y-y_1)}{b^2}\right\}^2=\left\{\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}\right\}\left\{\frac{x_1^{\,2}}{a^2}+\frac{y_1^{\,2}}{b^2}-1\right\}$$

$$(T-S_1)^2=(S+S_1-2T)S_1$$

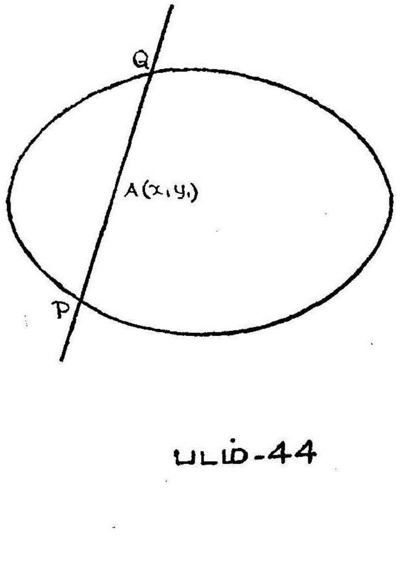
(அ - து.) $T^2=SS_1$

இங்கு $T=\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1$

$$S=\frac{x_1^{\,2}}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$$

$$S_1=\frac{x_1^{\,2}}{a^2}+\frac{y_1^{\,2}}{b^2}-1$$

8. **$A(x_1, y_1)$ புள்ளியை நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு.**



படம்-44

$A(x_1y_1)$ நடுப்புள்ளி ஆனதால்

$$AP=-AQ$$

$$AP+AQ=0$$

அதாவது முன்

சமன்பாடு (2)ன் தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை சூன்னமாகும்.

$$\frac{x_1\cos\theta}{a^2}+\frac{y_1\sin\theta}{b^2}=0$$

$\cos\theta$, $\sin\theta$ க்குப் பதில் முறையே $\frac{x-x_1}{r}$, $\frac{y-y_1}{r}$ ஐ இதில் ஈடாக்கின் நாணின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

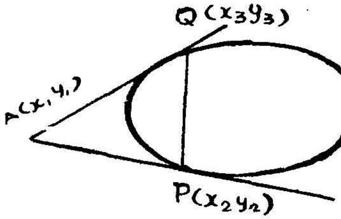
$$\frac{x_1(x-x_1)}{a^2}+\frac{y_1(y-y_1)}{b^2}=0$$

எனவே நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1$$

$$T=S_1$$

9. $A(x_1y_1)$ லிருந்து $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ க்கு வரையும் தொடுகோடு கனின் தொடு நாணின் சமன்பாடு.



படம் - 45

$A, P, Q,$ முறையே $(x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3)$ எனக் கொள்க.

$P(x_2y_2)$ இடத்துத் தொடு கோடு $\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}=1$ ......(1)

$Q(x_3y_3)$ இடத்துத் தொடு கோடு $\frac{xx_3}{a^2}+\frac{yy_3}{b^2}=1$ ......(2)

இவ்விரு தொடுகோடுகளும் $A(x_1y_1)$ வழிச் செல்வதால்

$$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=1 \quad ......(3)$$

$$\frac{x_1x_3}{a^2}+\frac{y_1y_3}{b_2}=1 \quad ......(4)$$

$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ என்ற கோட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

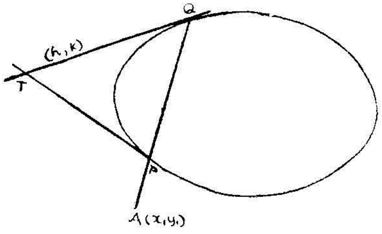
இக்கோடு சமன்பாடு (3), (4) ஆகியவைகளால் (x_2, y_2), (x_3, y_3) புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது என அறியலாம்.

எனவே தொடுநாண் PQ-ன் சமன்பாடு

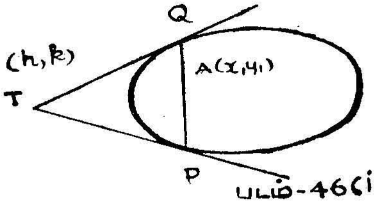
$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

அதாவது $T=0$

10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த (x_1y_1)ன் இசைக் கோடு.



படம்-46(i)



படம்-46(ii)

வரையறை :

$A(x_1y_1)$ வழிச் செல்லும் கோடு நீள் வட்டத்தினை P, Qல் வெட்டும் எனவும், P, Q இடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $T(h, k)$ எனவும் கொள்வோம்.

$T(h, k)$ன் இயங்குவரை (Locus) $A(x_1y_1)$ன் இசைக்கோடாகும்.

Tலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடு நாண் PQ ஆகையால், PQன் சமன்பாடு

$$\frac{xh}{a^2}+\frac{yk}{b^2}=1$$

இக்கோடு (x_1, y_1) வழிச் செல்வதால்

$$\frac{x_1h}{a^2}+\frac{y_1k}{b^2}=1$$

எனவே $T(h, k)$ன் இயங்குவரை அதாவது $A(x_1y_1)$ன் இசைக் கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \text{ ஆகும். (அ-து.) } T=0$$

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தின் $(x_1\,y_1)$ இடத்துச் செங் கோடு.

(x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோடு $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

தொடுகோட்டின் சாய்வு வீதம் $= -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$

∴ செங்கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_1}{x_1}$

∴ செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y-y_1 = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$

$$\frac{b^2}{y_1}(y-y_1) = \frac{a^2}{x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{b^2y}{y_1}-b^2 = \frac{a^2x}{x_1}-a^2$$

(அ-து.) $$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1} = a^2-b^2$$

12. $y=mx+c$ **கோடு** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **நீள்வட்டத்தைத் தொடுவதற்குரிய நிபந்தனை.**

$$y=mx+c \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) இவைகளிலிருந்து y-ஐ நீக்கினால்

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

$$x^2\left[\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right]+\frac{2mc}{b^2}x+\frac{c^2}{b^2}-1=0\ldots\ldots\ldots(3)$$

$y=mx+c$ கோடு நீள்வட்டத்தைத் தொடுமானால் சமன்பாடு (3)ன் மூலங்கள் சமமாயிருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{4m^2c^2}{b^4}-4\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)=0$$

$$\frac{m^2c^2}{b^4}-\frac{c^2}{b^2a^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{m^2c^2}{b^4}+\frac{m^2}{b^2}=0$$

(அ-து.) $$\frac{c^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}$$

$$\therefore \quad c^2 = a^2m^2+b^2$$

$$c = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

ஆகவே $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ கோடுகள், m-ன் அனைத்து மதிப்புக்கும் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தைத் தொடும்.

13. நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த ஒரு கோட்டின் இசைப்புள்ளி.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ஐச் சார்ந்த $lx+my+n=0$ கோட்டின் இசைப்புள்ளி $(x_1\ y_1)$ எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1)ன் இசைக்கோடு $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$

$lx+my+n=0$, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{l}{x_1/a^2} = \frac{m}{y_1/b^2} = \frac{n}{-1}$$

எனவே $x_1 = \frac{-a^2l}{n}$, $y_1 = \frac{-b^2m}{n}$

$\therefore$ $lx+my+n=0$ கோட்டின் இசைப்புள்ளி $\left(\frac{-a^2l}{n}, \frac{-b^2m}{n}\right)$

14. (x_1, y_1), (x_2, y_2) புள்ளிகள் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ஐச் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகளாவதற்குரிய நிபந்தனை.

(x_1, y_1)ன் இசைக்கோடு $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

இக்கோடு (x_2, y_2) வழிச் செல்வதால் $\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=1$

இதுவே வேண்டிய நிபந்தனையாகும்.

15. $lx+my+n=0$, $l_1x+m_1y+n_1=0$ கோடுகள் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ஐச் சார்ந்த துணையியக் கோடுகளாவதற்குரிய நிபந்தனை.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ஐச் சார்ந்த $lx+my+n=0$ன் இசைப்புள்ளி $\left(\frac{-a^2l}{n}, \frac{-b^2m}{n}\right)$

இப்புள்ளி $l_1x+m_1y+n_1=0$ கோட்டில் இருப்பதால்

$$-l_1\frac{a^2l}{n}-m_1\frac{b^2m}{n}+n_1 = 0$$

(அ - து.) $a^2ll_1+b^2mm_1 = nn_1$

16. குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம் (Director circle)

தம்முள் நேர்குத்தான தொடுகோடுகள் ஒரு வட்டத்தில் வெட்டும். இவ்வட்டத்திற்குக் குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம் எனப்பெயர்.

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ எனவும் தம்முள் செங்குத்தான தொடுகோடுகள் (x_1, y_1)-ல் வெட்டும் எனவும் கொள்வோம்.

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

இக்கோடு (x_1, y_1) வழிச் செல்வதால்

$$y_1 - mx_1 = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$
$$(y_1 - mx_1)^2 = a^2m^2+b^2.$$
(அ - து.) $m^2(x_1^2-a^2)-2mx_1y_1+y_1^2-b^2=0$ ......(1)

ஆகவே (x_1, y_1)லிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் சாய்வு வீதங்கள் சமன்பாடு (1)ஆல் கிடைக்கும்.

சமன்பாடு (1)ன் மூலங்கள் m_1, m_2 ஆனால்

$$m_1m_2 = \frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2}$$

m_1, m_2 என்பது (x_1, y_1)லிருந்து நீள்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் சாய்வு வீதங்களாகும்.

தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாதலின்

$$m_1m_2 = -1$$
$$\therefore\ \frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2} = -1$$

(அ - து.) $x_1^2+y_1^2 = a^2+b^2$

(x_1, y_1)ன் இயங்குவரை $x^2+y^2 = a^2+b^2$ எனும் வட்டம். இவ் வட்டத்தின் மையம் ஆதி. ஆரை $\sqrt{a^2+b^2}$. ஆகவே தம்முள் செங்குத்தான இரு தொடுகோடுகள் நீள்வட்டத்தின் மையத்தை மையமாக வும், $\sqrt{a^2+b^2}$ ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தில் வெட்டும்.

எனவே குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2+b^2$ ஆகும்.

17. குவியங்கள் S, S'-இவற்றிலிருந்து SY, $S'Y'$ என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் Pயிடத்துத் தொடுகோட்டிற்கு வரைந்தால், $SY \cdot S'Y'$ = மாறிலி.

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ எனக் கொண்டால் குவியங்கள் S, S'களின் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$.

Pயிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$-லிருந்து இத்தொடு கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துகளின் நீளம்

$$\frac{-mae+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}},\quad \frac{mae+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$ ஆகும்.

∴ இந்நீளங்களின் பெருக்குத்தொகை

$$= \frac{-m^2a^2e^2+a^2m^2+b^2}{1+m^2}$$

$$= \frac{a^2m^2(1-e^2)+b^2}{1+m^2}$$

$$= \frac{m^2b^2+b^2}{1+m^2} = \frac{b^2(1+m^2)}{1+m^2} \quad \{\because \; b^2=a^2(1-e^2)\}$$

$= b^2 =$ மாறிலி.

18. Y, Y'-ன் இயங்குவரை ஒரு வட்டமாகும்.

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ ......(1)

S-லிருந்து இதற்கு வரையும் செங்குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு

$y= -\frac{1}{m}\;(x-ae)$.

(அ - து.) $my+x = ae$ ......(2)

சமன்பாடுகள் (1), (2)லிருந்து mஐ விலக்க, Yன் இயங்குவரை வரும்.

(1), (2) சமன்பாடுகளின் தன் பெருக்கங்களைக் கூட்டினால்

$$(y-mx)^2+(my+x)^2 = a^2m^2+b^2+a^2e^2$$

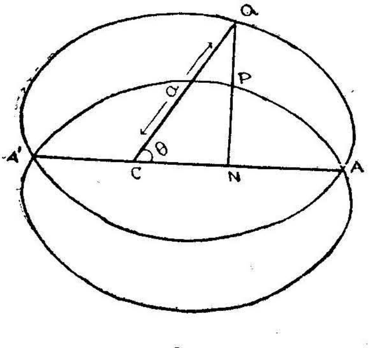
(அ - து.) $y^2(1+m^2)+x^2(1+m^2) = a^2(1+m^2)$

(அ - து.) $x^2+y^2 = a^2$.

இவ்வாறே Y'-ன் இயங்குவரையும் $x^2+y^2=a^2$ வட்டமென நிறுவலாம்.

இவ்வட்டம் நீள்வட்டத்தின் **துணைவட்டம்** (auxiliary circle) எனப்படும்.

19. துணைவட்டக் கோணம் (Eccentric angle)



படம்-47

நீள்வட்டத்தில் P புள்ளியின் குத்தாயத்தின் நீட்சி துணைவட்டத்தை Q-ல் வெட்டுமெனக் கொள்வோம்.

$Q\hat{C}N = \theta$ என்பது P புள்ளியின் துணைவட்டக் கோணம் எனப்படும்.

θ-வை நீள்வட்டத்தின் துணையலகாகக் கொள்ளலாம்.

P புள்ளி (x, y) எனின்

$x = CN = a\cos\theta$.

P நீள்வட்டத்தில் இருப்பதால் $\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$(அ\text{-}து.)\quad \frac{y^2}{b^2} = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$$\therefore\quad y = \pm\, b\sin\theta$$

இங்கு y-ன் மதிப்பு மிகையாகையால் P-ன் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ஆகும்.

$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ புள்ளியை 'θ' எனச் சொல்வது மரபு.

20. $P(\theta_1)$, $Q(\theta_2)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு.

P-யின் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$

Q-ன் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$

PQ-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x-a\cos\theta_1}{a(\cos\theta_1-\cos\theta_2)} = \frac{y-b\sin\theta_1}{b(\sin\theta_1-\sin\theta_2)}$$

$$(அ\text{-}து.)\quad \frac{x-a\cos\theta_1}{-2a.\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}.\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} = \frac{y-b\sin\theta_1}{2b.\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}.\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}$$

$$(அ\text{-}து.)\quad \left(\frac{x}{a}-\cos\theta_1\right).\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = -\left(\frac{y}{b}-\sin\theta_1\right).\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$(அ\text{-}து.)\quad \frac{x}{a}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \sin\theta_1.\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$+\cos\theta_1.\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$=\cos\left(\theta_1-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

21. $P(\theta_1)$ இடத்துத் தொடுகோடு.

Q, P புள்ளியோடு ஒன்றுபடும்பொழுது அதாவது $\theta_2\to\theta_1$, $P(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$ இடத்துத் தொடுகோடு கிடைக்கும்.

$\therefore$ 'θ_1' இடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\cos\theta_1+\frac{y}{b}\sin\theta_1=1$$

22. 'θ_1', 'θ_2' இடத்துத் தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி.

'θ_1', 'θ_2' இடத்துத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{a}\cos\theta_1 + \frac{y}{b}\sin\theta_1 = 1$$

$$\frac{x}{a}\cos\theta_2 + \frac{y}{b}\sin\theta_2 = 1$$

இச்சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின் அத்தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி கிடைக்கும்.

$$(\text{அ - து.})\quad \left\{\frac{a\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}},\ \frac{b\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right\}\ \text{ஆகும்.}$$

23. 'θ' இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு.

'θ' இடத்துத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1.$$

தொடு கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= -\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\therefore$ செங்கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$(y-b\sin\theta) = \frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x-a\cos\theta)$$

$$(\text{அ - து.})\quad (y-b\sin\theta)\frac{b}{\sin\theta} = \frac{a}{\cos\theta}(x-a\cos\theta)$$

$$(\text{அ - து.})\quad \frac{by}{\sin\theta} - b^2 = \frac{ax}{\cos\theta} - a^2$$

$$(\text{அ - து.})\quad \frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$$

24. நீள் வட்டத்தின் நான்கு செங்கோடுகள் குறித்த புள்ளி வழிச் செல்லும்.

நீள்வட்டம் $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, குறித்த புள்ளி (h, k) எனவும், 'θ' இடத்துச் செங்கோடு இப்புள்ளி வழிச் செல்லும் எனவும் கொள்வோம்.

'θ' இடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$$

இக்கோடு (h, k) வழிச் செல்வதால்

$$\frac{ah}{\cos\theta} - \frac{bk}{\sin\theta} = a^2 - b^2$$

(அ - து.) $ah \cdot \dfrac{1+t^2}{1-t^2} - bk \cdot \dfrac{1+t^2}{2t} = a^2 - b^2$

இங்கு $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

(அ - து.) $bk \cdot t^4 + 2(ah + a^2 - b^2)\, t^3 + 2(ah - a^2 + b^2)\, t - bk = 0$

ஆகவே t-க்கு நான்கு மதிப்புகள் உண்டு.

அம்மதிப்புகளில் ஒன்று 't_1' எனக் கொள்ளின்

$$\tan\frac{\theta}{2} = t_1$$

$$\therefore \quad \frac{\theta}{2} = n\pi + \tan^{-1} t_1$$

$$\therefore \quad \theta = 2n\pi + 2\tan^{-1} t_1$$

ஒரு புள்ளியின் துணைவட்டக் கோணத்தோடு 2π-ன் மடங்குகளைக் கூட்டினால், அப்புள்ளியின் துணைவட்டக் கோணம்தான் கிடைக்கும். எனவே 't'-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் நீள்வட்டத்தின் ஒரு புள்ளியைக் கொடுக்கும். ஆகவே நீள்வட்டத்தின் நான்கு செங்கோடுகள் (h, k) வழிச் செல்லும்.

25. ஒரு புள்ளிவழிச் செல்லும் நாற்செங்கோட்டின் அடிகள் ஒரு கூம்பு வெட்டியில் இருக்கும்.

(x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$$

இது (h, k) புள்ளிவழிச் செல்வதால்

$$\frac{a^2h}{x_1} - \frac{b^2k}{y_1} = a^2 - b^2$$

(அ - து.) $(a^2 - b^2)\, x_1y_1 + b^2kx_1 - a^2hy_1 = 0$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$$(a^2 - b^2)\, xy + b^2kx - a^2hy = 0$$

இது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகையால் ஒரு கூம்பு வெட்டியைக் குறிக்கும். இக்கூம்புவெட்டி (h, k), நீள்வட்டத்தின் மையம் $(0, 0)$

புள்ளிகளின் வழிச்செல்லும். இது ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவு என்று பின்னர் அறியலாம்.

26. ஒரு வட்டம் ஒரு நீள்வட்டத்தை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும். அவற்றின் துணைவட்டக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை π-ன் இரட்டை மடங்காகும்.

நீள்வட்டம் $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

வட்டம் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

நீள்வட்டத்தின் 'θ' எனும் ஒரு புள்ளி வட்டத்திற்குப் பொது வானால்

$$a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+3ga\cos\theta+2fb\sin\theta+c=0.$$

(அ - து.) $a^2\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+b^2\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2+2ga\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+2fb\dfrac{2t}{1+t^2}$

$+c=0.$ இங்கு $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$

(அ - து.) $(a^2+c-2ag)t^4+4fbt^3+2(c+2b^2-a^2)\,t^2+4fbt$
$+(c+a^2+2ag)=0\ldots\ldots\ldots(1)$

இது நாற்படிச் சமன்பாடாகையால் 't'-க்கு நான்கு மூலங்கள் (மெய் அல்லது கற்பனை) உண்டு. அவற்றிற்கு ஏற்ப நான்கு புள்ளி களில் வட்டமும் நீள்வட்டமும் வெட்டிக்கொள்ளும்.

சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனின்

$$\Sigma t_1=-\frac{4fb}{a^2+c-2ag}$$

$$\Sigma t_1t_2t_3=\frac{-4fb}{a^2+c-2ag}$$

$$\therefore\ \Sigma t_1=\Sigma t_1t_2t_3$$

இத்தீர்வுகள் தரும் துணைவட்டக் கோணங்கள் $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ எனின்

$$\Sigma\tan\frac{\theta_1}{2}=\Sigma\tan\frac{\theta_1}{2}\cdot\tan\frac{\theta_2}{2}\cdot\tan\frac{\theta_3}{2}.$$

$$\tan\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2}+\frac{\theta_3}{2}+\frac{\theta_4}{2}\right)$$

$$=\frac{\Sigma\tan\frac{\theta_1}{2}-\Sigma\tan\frac{\theta_1}{2}\cdot\tan\frac{\theta_2}{2}\tan\frac{\theta_3}{2}}{1-\Sigma\tan\frac{\theta_1}{2}\cdot\tan\frac{\theta_2}{2}+\tan\frac{\theta_1}{2}\cdot\tan\frac{\theta_2}{2}\tan\frac{\theta_3}{2}\cdot\tan\frac{\theta_4}{2}}$$

$$=0.$$

$$\therefore \quad \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2} = n\pi \text{ (}n\text{ ஒரு முழு எண்).}$$

$$\therefore \quad \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=2n\pi.$$

∴ துணைவட்டக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை π-ன் இரட்டை மடங்காகும்.

P, Q, R, S புள்ளிகள் 'θ_1', 'θ_2', 'θ_3', 'θ_4' ஆனால்

$$PQ\text{-ன் சாய்வு வீதம்} = -\frac{b\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{a\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

$$= -\frac{b}{a}\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$= -\frac{b}{a}\cos\left(n\pi-\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\right)$$

$$= +\frac{b}{a}\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}$$

$$= -RS\text{-ன் சாய்வு வீதம்.}$$

PQ, RS கோடுகள் ஆயத்தோடு சமச்சாய்வுடையனவாக இருக்கும்.

27. $y=mx$ விட்டத்துக்கு ஒரு போகான நாண்களின் நடுப் புள்ளிகளின் இயங்குவரை காணல்.

$y=mx$ விட்டத்துக்கு ஒரு போகான நாணின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

$$\therefore \text{ நாணின் சமன்பாடு } \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$$

இக்கோடு $y=mx$க்கு ஒரு போகானதால்

$$m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

$$\therefore (x_1, y_1)\text{ன் இயங்குவரை } y=-\frac{b^2}{a^2m}x$$

இது நீள்வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும். இவ்விட்டத்தின் சமன்பாட்டை $y=m_1x$ எனக் கொண்டால்

$$m_1=-\frac{b^2}{a^2m}$$

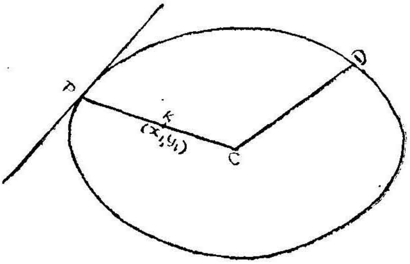
$$\therefore mm_1=-\frac{b^2}{a^2}$$

ஆகவே நீள்வட்ட விட்டமொன்றுக்கு ஒரு போகான நாண்களைப் பிறிதொரு விட்டம் சமமாகப் பிரிப்பின், இவ்விட்டத்துக்கு ஒரு போகான நாண்களை முதல் விட்டம் சமமாகப் பிரிக்கும்.

இரு விட்டங்களுள் ஒன்று மற்றதற்கு ஒரு போகான நாண்களைச் சமமாகப் பிரிப்பின் இவை **துணையிய விட்டங்கள்** (Conjugate diameters) எனப்படும். இத்தகைய விட்டங்கள் $y=mx$, $y=m_1x$ எனின் $mm_1 = \frac{-b^2}{a^2}$.

28. நீள் வட்டவிட்டத்து எப்புள்ளியின் இசைக் கோடும் துணையிய விட்டத்துக்கு ஒரு போகாக இருக்கும்.

CP-ல் உள்ள புள்ளி Kயின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனக் கொள்ளின் CP-ன் சமன்பாடு $y = \frac{y_1}{x_1} x$.



படம்-48

$K(x_1, y_1)$ன் இசைக்கோடு $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

$\therefore$ இக்கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

CD-ன் சமன்பாடு $y=m_1x$ எனக் கொள்ளின்

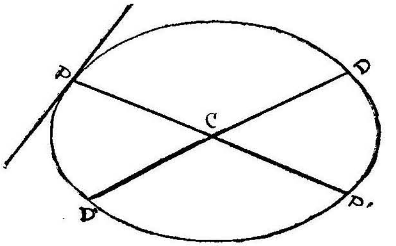
$$m_1 \frac{y_1}{x_1} = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore m_1 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$$

$\therefore$ CDயும் $K(x_1, y_1)$ன் இசைக் கோடும் ஒரு போகானவை.

29. துணையிய இருவிட்டங்களின் முனைப்புள்ளிகளின் துணை வட்டக் கோணங்களின் வேறுபாடு ஒரு செங்கோணமாகும்.

துணையிய விட்டங்கள் PCP', DCD' எனவும் P, D புள்ளிகளின் துணை வட்டக் கோணங்கள் முறையே θ, φ எனவும் கொள்வோம்.



படம்-49

P இடத்துத் தொடுகோடு $\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$

$\therefore$ CD-ன் சமன்பாடு $\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 0$ (§ 24லிருந்து)

D இதில் அமைவதால் $\frac{a\cos\varphi\cos\theta}{a} + \frac{b\sin\varphi\sin\theta}{b} = 0$

$$\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\varphi = 0$$

$$\cos(\theta \sim \varphi) = 0$$

$$\theta \sim \varphi = \pi/2$$

$\therefore$ $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ என்றால் $D(a\cos\overline{\pi/2+\theta}, b\sin\overline{\pi/2+\theta})$

(அ - து.) $D(-a\sin\theta, b\cos\theta)$

$$CP^2 + CD^2 = a^2 + b^2$$

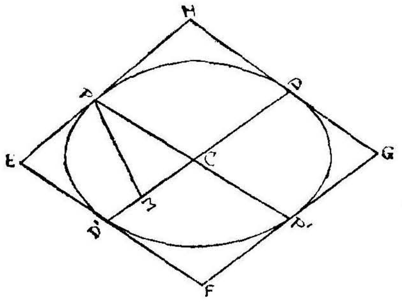
$$CP^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$

$$CD^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$$\therefore CP^2 + CD^2 = a^2 + b^2$$

30. P இடத்துச் செங்கோடு CDஐ Mல் வெட்டினால் $PM . CD = ab$.

P-இடத்துத் தொடுகோடு $\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$



படம்-50

P இடத்துத் தொடுகோடு *CD*க்கு ஒரு போகாகையால் *PM* = *C*லிருந்து *P* இடத்துத் தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துத் தூரம்

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{ab}{CD}$$

$\therefore\ PM\,.\,CD = ab$

31. (1) *P, P', D, D'* இடத்துத் தொடு கோடுகளால் அமைந்த ஒரு போகு நாற்கரத்தின் பரப்பு ஒரு மாறிலியாகும்.

$\square$gm $EFGH = 4\square$gm. $CD.HP$

$= 4\,.\,CD\,.\,PM$

$= 4ab$

= பேரச்சு, குற்றச்சால் அமைந்த நீள் சதுரப் பரப்பு

= மாறிலி

(2) நீள்வட்டத்தின் குவியங்கள் *S, S'* எனின் $SP\,.\,SP' = CD^2$.

$$\left.\begin{aligned} SP &= a-ae\cos\theta \\ S'P &= a+ae\cos\theta \end{aligned}\right\}$$ – § 5லிருந்து

$$\begin{aligned} \therefore\ SP\,.\,S'P &= a^2(1-e^2\cos^2\theta) \\ &= a^2\,.\,(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-(a^2-b^2)\cos^2\theta \\ &= a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta \\ &= CD^2 \end{aligned}$$

32. துணையிய சமவிட்டங்கள் (Equi conjugate diameters)

P, D துணையிய இருவிட்ட நுனிகள் எனின், அவற்றின் துணை வட்டக் கோணங்கள் θ, $\theta+\pi/2$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$CP^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$
$$CD^2 = a^2\cos^2(\pi/2+\theta) + b^2\sin^2(\theta+\pi/2)$$
$$= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$
$$CP^2 - CD^2 = (a^2-b^2)\cos 2\theta$$

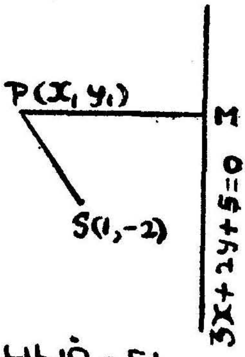
$CP = CD$ எனின் $\cos 2\theta = 0$, (அ-து.) $\theta = \pi/4$ அல்லது $3\pi/4$

∴ CP-ன் சமன்பாடு $$y = \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta}\cdot x$$
$$= \frac{b}{a}\tan\theta\cdot x$$
$$= \frac{b}{a}\tan\frac{\pi}{4}x$$
$$= \frac{b}{a}x$$

CD-ன் சமன்பாடு $$y = \frac{b}{a}\tan(\theta+\pi/2)x$$
$$= \frac{b}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)x$$
$$= -\frac{b}{a}x$$

∴ துணையிய சமவிட்டங்களின் சமன்பாடுகள் $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ ஆகும்.

மாதிரி 1: ஒரு நீள்வட்டத்தின் குவியம் $(1, -2)$, ஒத்த இயக்குவரை $3x-2y+5=0$, மையத் தொலை விகிதம் $\frac{1}{2}$ எனின் அதன் சமன்பாடு காண்க.



படம் - 51

நீள்வட்டத்துப் புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனக் கொள்வோம்.

PM-இயக்கு வரைக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு.

$$\frac{SP}{PM} = e = \frac{1}{2}$$
$$4SP^2 = PM^2$$

$$4\,[(x_1-1)^2+(y_1+2)^2] = \left\{\frac{3x_1-2y_1+5}{\sqrt{a+4}}\right\}^2$$

$$43x_1^2+12x_1y_1+48y_1^2-134x_1+228y_1+235=0$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை அதாவது நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $43x^2+12xy+48y^2-134x+228y+235=0$.

மாதிரி 2 : $9x^2+25y^2-18x-100y-116 = 0$ நீள்வட்டத்தின் மையம், மையத் தொலை தகவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

இச்சமன்பாட்டினை $9(x^2-2x)+25(y^2-4y)=116$ என எழுதலாம்.

(அ-து.) $9(x^2-2x+1)+25(y^2-4y+4) = 225$

(அ-து.) $9(x-1)^2+25(y-2)^2 = 225$

(அ-து.) $\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

ஆதியை (1, 2) புள்ளிக்கு மாற்றின், நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9} = 1$

ஆகவே நீள்வட்டத்தின் மையம் (1, 2) ஆகும்.

பேரச்சு $2a = 10$

குற்றச்சு $2b = 6$

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

$$9 = 25(1-e^2)$$

$$1-e^2 = \tfrac{9}{25}$$

$$e^2 = \tfrac{16}{25} \qquad \therefore\ e = \tfrac{4}{5}$$

மாதிரி 3 : $lx+my+n=0$ கோடு $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்துச் செங்கோடாயின் $\dfrac{a^2}{l^2}+\dfrac{b^2}{m^2} = \dfrac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$ என நிறுவுக.

நீள்வட்டத்தின் ' θ ' இடத்துச் செங்கோடு $lx+my+n=0$ எனக்கொள்க. ......(1)

' θ ' இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta} = a^2-b^2 \qquad ......(2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{l}{a/\cos\theta}=\frac{m}{-b/\sin\theta}=\frac{-n}{a^2-b^2}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{-an}{l\,(a^2-b^2)}; \ \sin\theta = \frac{bn}{m\,(a^2-b^2)}$$

$$\therefore \quad \frac{a^2n^2}{l^2(a^2-b^2)^2} + \frac{b^2n^2}{m^2(a^2-b^2)^2} = 1$$

$$(\text{அ - து})\ \frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}.$$

மாதிரி 4 : குவியம் வழிச் செல்லும் துணையியக் கோடுகள் இடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணம் என நிறுவுக.

குவியம் வழிச் செல்லும் துணையியக் கோடுகள் $lx+my+n = 0$, $l_1x+m_1y+n_1 = 0$ எனக் கொள்க.

இவை துணையியக் கோடுகளாகையால் $a^2ll_1+b^2mm_1 = nn_1$......(1)

கோடுகள் குவியம் வழிச் செல்வதால்

$$lae+n=0, \quad l_1ae+n_1=0$$

$$nn_1 = ll_1a^2e^2$$

இம்மதிப்பை (1)ல் ஈடாக்கின்

$$a^2ll_1+b^2mm_1 = ll_1a^2e^2$$

$$ll_1a^2(1-e^2)+b^2mm_1 = 0$$

$$ll_1b^2+b^2mm_1 = 0$$

$$(\text{அ - து.})\left(-\frac{l}{m}\right)\left(-\frac{l_1}{m_1}\right) = -1$$

$\therefore \quad lx+my+n=0, \quad l_1x+m_1y+n_1=0$ கோடுகளிடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணமாகும்.

மாதிரி 5 : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் செங்கோடுகளின் இசைப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை காண்க.

நீள்வட்டத்தின் 'θ' இடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2-b^2 \qquad \text{......(1)}$$

இதன் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக்கொள்ளின் இசைக்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2} = 1$ ......(2)

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{a/\cos\theta} = \frac{\frac{y_1}{b^2}}{-b/\sin\theta} = \frac{1}{a^2-b^2}$$

$$(\text{அ - து.})\ \frac{x_1\cos\theta}{a^3} = \frac{y_1\sin\theta}{-b^3} = \frac{1}{a^2-b^2}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{a_3}{x_1}\cdot\frac{1}{a^2-b^2},\ \sin\theta = -\frac{b^3}{y_1}\cdot\frac{1}{a^2-b^2}$$

$$\left(\frac{a_3}{x_1}\cdot\frac{1}{a^2-b^2}\right)^2+\left(-\frac{b^3}{y_1}\cdot\frac{1}{a^2-b^2}\right)^2=1$$

(அ - து). $\dfrac{a^6}{x_1^2}+\dfrac{b^6}{y_1^2}=(a^2-b^2)^2$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $\dfrac{a^6}{x^2}+\dfrac{b^6}{y^2}=(a^2-b^2)^2$

மாதிரி 6 : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தின் துணைவட்டத்தின் தொடுகோடுகளின் நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை காண்க.

துணைவட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$

துணைவட்டத்துத் தொடுகோடு ஒன்றின் நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$(x_1\ y_1)$-ன் இசைக்கோடு $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$

இக்கோடு துணைவட்டம் $x^2+y^2=a^2$ஐத் தொடுவதால்

$$a^2\left(-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)^2+a^2=\left(\frac{b^2}{y_1}\right)^2$$

(அ - து). $\dfrac{b^4x_1^2}{a^2y_1^2}+a^2=\dfrac{b^4}{y_1^2}$

(அ - து). $\dfrac{x_1^2}{a^4}+\dfrac{y_1^2}{b^4}=\dfrac{1}{a^2}$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}=\dfrac{1}{a^2}.$

மாதிரி 7 : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்துச் செங்கோட்டு நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை காண்க.

'θ' இடத்துச் செங்கோட்டு நாணின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

'θ' இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2 \qquad \ldots\ldots(1)$$

நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) ஆகவுள்ள நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} \qquad \ldots\ldots(2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{\dfrac{x_1}{a^2}}{\dfrac{a}{\cos\theta}} = \frac{\dfrac{y_1}{b^2}}{\dfrac{-b}{\sin\theta}} = \frac{\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}}{a^2-b^2}$$

(அ-து.) $\dfrac{x_1\cos\theta}{a^3} = \dfrac{y_1\sin\theta}{-b^3} = \dfrac{\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}}{a^2-b^2}$

$$\cos\theta = \frac{a^3}{x_1}\cdot\frac{\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}}{a^2-b^2}$$

$$\sin\theta = -\frac{b^3}{y_1}\cdot\frac{\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}}{a^2-b^2}$$

$$\therefore \left(\frac{a^3}{x_1}\cdot\frac{\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}}{a^2-b^2}\right)^2 + \left(-\frac{b^3}{y_1}\cdot\frac{\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}}{a^2-b^2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{a^6}{x_1^2}+\frac{b^6}{y_1^2} = \frac{(a^2-b^2)^2}{\left(\dfrac{x_1^3}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\left(\frac{a^6}{x_1^2}+\frac{b^6}{y_1^2}\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)^2 = (a^2-b^2)^2$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$$\left(\frac{a^6}{x^2}+\frac{b^6}{y^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) = (a^2-b^2)^2.$$

மாதிரி 8 : குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்திலிருந்து (Director Circle) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடு தொடு நாணின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை காண்க.

குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2 = a^2+b^2$.

குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்திலுள்ள (h, k) புள்ளியிலிருந்து நீள்வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுகோட்டுத் தொடுநாணின் சமன்பாடு

$$\frac{xh}{a^2}+\frac{yk}{b^2} = 1 \qquad \ldots\ldots(1)$$

இத்தொடு நாணின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

தொடு நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} \qquad \ldots\ldots(2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{\frac{h}{a^2}}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\frac{k}{b^2}}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{1}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}}$$

$$(\text{அ - து.})\ h = \frac{x_1}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}}$$

$$k = \frac{y_1}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}}$$

(h, k) புள்ளி குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்திலிருப்பதால்

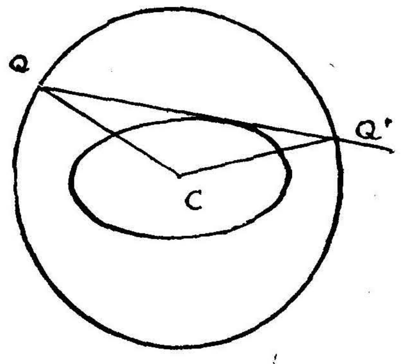
$$\left(\frac{x_1}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}}\right)^2 = a^2+b^2$$

$$(\text{அ - து.})\ \left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x_1^2+y_1^2}{a^2+b^2}$$

$\therefore$ $(x_1, y_1$-ன் இயங்குவரை

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}.$$

மாதிரி 9 : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்துத் தொடுகோடு ஒன்று குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தை Q, Q′ல் வெட்டின் CQ, CQ′ நீள் வட்டத்தின் துணையிய விட்டங்களாகும் என நிறுவுக.



படம்-52

QQ'-ன் சமன்பாடு $y = mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ CQ, CQ' கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$x^2+y^2 = (a^2+b^2)\left(\frac{y-mx}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)^2$$

(அ - து.) $(x^2+y^2)(a^2m^2+b^2) = (a^2+b^2)(y-mx)^2$

(அ - து.) $y^2-\frac{2mxy\,(a^2+b^2)}{a^2(1-m^2)}-\frac{b^2x^2}{a^2} = 0$ ......(1)

$\therefore$ CQ, CQ' கோடுகளின் சாய்வு வீதங்கள் m_1, m_2 எனின் (1) சமன்பாட்டால் $m_1 m_2 = \frac{-b^2}{a^2}$ என்று வரும்.

$\therefore$ CQ, CQ' துணையிய விட்டங்களாகும்.

மாதிரி 10: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள்வட்டத்தின் துணையிய அரை விட்டங்களை, விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்களின் இரண்டாவது வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்குவரை

$2(x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2$ என நிறுவுக.

CP, CQ-ஐ துணையிய அரை விட்டங்களாகக் கொள்வோம்.

P-யின் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\theta, b\sin\theta)$

Q-யின் ஆயத்தொலைகள் $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$.

CP-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$(x-a\cos\theta)(x-0)+(y-b\sin\theta)(y-0) = 0.$

(அ - து.) $x^2+y^2-ax\cos\theta-by\sin\theta = 0$ ......(1)

இதேபோல் CQ-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+ax\sin\theta-by\cos\theta = 0$ ......(2)

$R(x_1y_1)$, (1), (2) வட்டங்களின் இரண்டாவது வெட்டுப் புள்ளியானால்

$$x_1^2+y_1^2 = ax_1\cos\theta+by_1\sin\theta$$

$$x_1^2+y_1^2 = -ax_1\sin\theta+by_1\cos\theta$$

$$\therefore\ 2(x_1^2+y_1^2)^2 = (ax_1\cos\theta+by_1\sin\theta)^2 +(-ax_1\sin\theta+by_1\cos\theta)^2$$

(அ - து.) $2(x_1^2+y_1^2)^2 = a^2x_1^2+b^2y_1^2$

$\therefore$ $R(x_1, y_1)$-ன் இயங்கு வரை

$$2(x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2.$$

மாதிரி 11 : $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{5}=1$ நீள் வட்டத்தின் α இடத்துச் செங்கோடு நீள் வட்டத்தை மீண்டும் 2α-ல் வெட்டினால் $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ என நிறுவுக.

$\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{5}=1$ நீள் வட்டத்தின் α இடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{\sqrt{14}x}{\cos\alpha}-\frac{\sqrt{5}y}{\sin\alpha} = 14-5 = 9.$$

'2α' புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(\sqrt{14}\cos 2\alpha, \sqrt{5}\sin 2\alpha)$.

'α' இடத்துச் செங்கோடு '2α' புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$\frac{14\cos 2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{5\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 9$$

$$\frac{14(2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha}-10\cos\alpha = 9$$

$$28\cos^2\alpha-14-10\cos^2\alpha = 9\cos\alpha.$$

$$18\cos^2\alpha-9\cos\alpha-14 = 0$$

$$18\cos^2\alpha-21\cos\alpha+12\cos\alpha-14 = 0$$

$$3\cos\alpha(6\cos\alpha-7)+2(6\cos\alpha-7) = 0$$

$$(3\cos\alpha+2)(6\cos\alpha-7) = 0$$

$3\cos\alpha+2 = 0$ அல்லது $6\cos\alpha-7 = 0$

$\therefore \cos\alpha = -\frac{2}{3}$. ($\cos\alpha = \frac{7}{6}$ பொருந்தாது)

பயிற்சிகள் 7

1. ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியம் $(3, -1)$. ஒத்த இயக்கு வரை $x-y+16=0$. மையத்தொலை விகிதம் $\frac{1}{2}$ எனின், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

விடை : $7x^2+2xy+7y^2-80x+48y-176=0$.

2. ஒரு நீள் வட்டத்தின் மையம் $(2, 3)$, குவியம் $(3, 4)$ மையத் தொலை விகிதம் $\frac{1}{2}$ எனின், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

விடை : $\frac{(x-y+1)^2}{16}+\frac{(x+y-5)^2}{12}=1$.

3. ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியம் $(-2, 3)$, ஒத்த இயக்கு வரை $2x+3y+4=0$, மையத்தொலை விகிதம் $\frac{4}{5}$ எனின் அதன் சமன்பாடு என்ன ?

விடை : $261x^2-192xy+181y^2+1044x-2334y+3969=0$.

4. ஒரு நீள் வட்டத்தின் மையத்தொலை விகிதம் $\frac{1}{3}$, செவ்வகலத்தின் நீளம் 8 எனின் நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

விடை : $8x^2+9y^2=162$.

5. கீழ்கண்ட நீள் வட்டங்களின் மையம், செவ்வகலம் மையத் தொலை விகிதம், குவியங்களைக் காண்க.

(i) $4x^2+5y^2-16x+10y+1=0$

(ii) $9x^2+25y^2-18x-100y-116=0$

(iii) $(x-1)^2+9(y-2)^2=36$.

விடை : (i) மையம் $(2, -1)$; செவ்வகலம் $\frac{8}{\sqrt{2}}$; $e=\frac{1}{\sqrt{5}}$
குவியங்கள் $(1, -1), (3, -1)$

(ii) மையம் $(1, 2)$ செவ்வகலம் $\frac{18}{5}$, $e=\frac{4}{5}$
குவியங்கள் $(5, 2), (-3, 2)$

(iii) மையம் $(1, 2)$ செவ்வகலம் $\frac{4}{3}$, $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
குவியங்கள் $(1\pm\sqrt{2}, 2)$.

6. $lx+my+n=0$ கோடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-ஐத் தொடின் $a^2l^2+b^2m^2=n^2$ என நிறுவுக.

7. இரு புள்ளிகளின் துணை வட்டக் கோணங்கள் தம் வேற்றுமைத் தொகை நிலைத்ததாகின், அப்புள்ளிகளை இணைக்குங் கோடு ஒரு நிலைத்த நீள் வட்டத்தினைத் தொடுமெனக் காண்பி.

8. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகளில் இரண்டு $(-6, 4)$, $(4, 5\frac{3}{8})$ என நிறுவுக.

9. $lx+my=1$ கோட்டின் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளி $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4$ல் இருப்பதற்குரிய கட்டுப்பாடு என்ன?

விடை : $a^2l^2+b^2m^2=4$.

10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டச் செங்கோடுகளின் $x^2+y^2=a^2-b^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளியின் இயங்கு வரை $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$ என நிறுவுக.

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்ட நாண்கள் மையத்தோடு செங்கோணத்தைப் பிறப்பிப்பின், அவற்றின் இசைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வரை $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ என நிறுவுக.

12. P-ன் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக்கோடு $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ நீள் வட்டத்தைத் தொடின், P-ன் இயங்கு வரை $\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}=\frac{1}{a^2b^2}$ என நிறுவுக.

13. P புள்ளியின் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ நீள் வட்டங்களைச் சார்ந்த இசைக்கோடுகள் Q-ல் வெட்டுகின்றன. $lx+my+n=0$ கோட்டில் P இருப்பின் Q-ன் இயங்குவரை $n\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)xy+mx+ly=0$ எனக் காண்பி.

14. $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ நீள் வட்டத்தைத் தொடும் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்ட நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வரை $A^2\frac{x^2}{a^4}+B^2\frac{y^2}{b^4}=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2$ என நிறுவுக.

15. $\frac{lx}{a}+\frac{my}{b}=1$, $\frac{x}{la}+\frac{y}{mb}+1=0$ கோடுகள் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் நாண் இடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழிச் செல்லுமென நிறுவுக.

16. 'α', 'β', 'γ' இடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழிச் செல்லின் $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)=0$ என நிறுவுக.

17. ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் நாற் செங்கோட்டின் அடிகள் தம் துணைவட்டக் கோணங்கள் θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 எனின், $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4$, π-ன் ஒற்றை மடங்காகும் என நிறுவுக.

18. $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ கோடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தைத் தொடின் $p^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$ என நிறுவுக.

19. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தின் குவிய நாண் ஒன்றின் நுனிகள் தம் துணை வட்டக் கோணங்கள் θ_1, θ_2 எனின்

$$\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=e\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$ என நிறுவுக.

20. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டக் குவிய நாணுக்கு, அதன் நுனிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி நீள்வட்ட மையம் இவற்றிலிருந்து வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே p, q எனின் $pq = b^2$ என நிறுவுக.

21. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் செங்கோணம் இடைப்பட்ட இரு அரை விட்டங்கள் CP, CQ எனின் $\frac{1}{CQ^2} + \frac{1}{CQ^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ என நிறுவுக.

22. செங்கோணத்தில் வெட்டும் இரு விட்டங்களின் நுனிகளை இணைக்கும் நாண்கள், நீள் வட்ட மையத்திலிருந்து நிலைத்த தொலைவில் இருக்குமெனக் காண்பி.

23. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் 'θ' இடத்துத் தொடுகோடு துணை வட்டத்தை மையத்தில் செங்கோணம் பிறப்பிக்கும் இருபுள்ளிகளில் வெட்டின் $\frac{1}{e^2} = 1 + \sin^2\theta$ என நிறுவுக.

24. $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ அதிபரவளைவிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்துக்கு வரையும் தொடுகோடுகள் ஆயத்தோடு நிரப்புக் கோணங்களைப் பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.

25. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ன் செவ்வகல நுனியிடத்துச் செங்கோடு பேரச்சினை G-ல் வெட்டின் $CG = ae^2$ என நிறுவுக. (இங்கு C நீள் வட்டத்தின் மையமாகும்.)

26. மையத்தொலைவிகிதம் e உள்ள நீள் வட்டத்தின் செவ்வகல நுனியிடத்துச் செங்கோடு குற்றச்சின் நுனிவழிச் செல்லின் $e^4 + e^2 - 1 = 0$ என நிறுவுக.

27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் மையம் C, P புள்ளிக்கு ஒத்த துணை வட்டத்துப் புள்ளி p, Cp-ன் நீட்சி $x^2 + y^2 = 4(a+b)^2$ வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி Q எனின், PQ, $\frac{x^2}{(2a+b)^2} + \frac{y^2}{(2b+a)^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் செங்கோடென நிறுவுக.

28. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-ன் துணையிய இருவிட்ட நுனிகள் P, D எனின் (i) P, D-ன் நடுப்புள்ளி, (ii) மையத்திலிருந்து PD-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டு அடி, (iii) P, D இடத்துத் தொடுகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி இவற்றின் இயங்குவரைகளைக் காண்க.

29. துணையிய இரு விட்ட நுனிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ எனின் $a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = 2p^2$ என நிறுவுக.

30. ஒரு நீள் வட்டத்தில் C மையம், CP, CD துணையிய இரு அரை விட்டங்கள், PSQ ஒரு குவிய நாண், P-ன் துணைவட்டக் கோணம் 'θ' எனின், $\cos\theta+\sin\theta=\frac{1}{e}$ எனவும், PQ-வின் நீளம் அரை பேரச்சு எனவும் நிறுவுக.

31. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்துத் துணையிய இருவிட்ட நுனிகள் P, Q எனின், $PQ^2-(SP-SQ)^2=2b^2$ என நிறுவுக. இங்கு S நீள் வட்டத்துக் குவியங்களுள் ஒன்றுகும்.

32. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்துத் துணையிய விட்டங்களின் இடைப்பட்ட கோணம், விட்டங்கள் சமமாயிருக்கும்போது, மிகச் சிறு மதிப்பு உடையதாயிருக்குமென நிறுவுக.

33. துணையிய இரு விட்டங்கள் நீள் வட்டப் புள்ளி ஒன்றிடத்து φ_1, φ_2 கோணங்களைப் பிறப்பிப்பின் $\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2$ மாறு ராசியென நிறுவுக.

34. துணையிய ஈரரை விட்டங்களின் நுனிகளிடத்துச் செங்கோடுகளின் தொடுகுத்துக்கும், பேரச்சுக்கும் இடைப்பட்ட பகுதிகள் தன் பெருக்கத்தின் கூட்டுத்தொகை $a^2(1-e^2)$ $(2-e^2)$ என நிறுவுக.

35. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ நீள் வட்டங்களின் வெட்டும் புள்ளிகள் முதல் வட்டத்தின் துணையிய விட்டங்களின் நுனிகளானல், $\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}=2$ என நிறுவுக.

36. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-ன் P இடத்துச் செங்கோடு CP-யின் துணையிய

விட்டமான CD-ஐ Q-ல் வெட்டின், Q-ன் இயங்குவரை $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=\left(\frac{a^2-b^2}{x^2+y^2}\right)^2$ என நிறுவுக.

37. நீள் வட்டத்தின் பேரச்சு துணையிய இருவிட்ட நுனிகளிடத்து α, β கோணங்களைப் பிறப்பிப்பின் $\cos^2\alpha+\cos^2\beta$ நிலைத்த மதிப்புடையது என நிறுவுக.

38. $4x^2+5y^2=20$ நீள் வட்டத்து $x+2y-1=0$ நாணின் நடுப்புள்ளி $(\frac{5}{21}, \frac{8}{21})$ என நிறுவுக.

39. மையத்துச் செங்கோணம் பிறப்பிக்கும் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்து நாண்களின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரையினைக் காண்க.

விடை : $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2$

40. $x^2+y^2=c^2$ வட்டத்தைத் தொடும் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்து நாண்களின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2$ என நிறுவுக.

41. (h, k) வழிச்செல்லும் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்ட நாண்களின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{xh}{a^2}+\frac{yk}{b^2}$ என நிறுவுக.

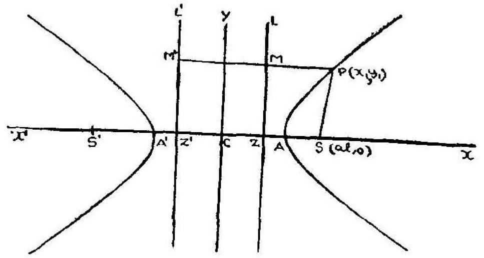
42. CP, CD, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்துத் துணையிய அரைவிட்டங்களானுல், முக்கோணம் CPD-யின் செங்கோட்டுமையத்தின் இயங்குவரை $2(b^2y^2+a^2x^2)^3=(a^2-b^2)^2(b^2y^2-a^2x^2)^2$ என நிறுவுக.

7. அதிபர வளைவு

(Hyperbola)

1. ஒரு கூம்பு வெட்டியின் மையத் தொலை விகிதம் $e>1$ எனின் அதனை அதிபர வளைவு என வரையறுத்தோம்.

2. அதிபர வளைவின் திட்டச் சமன்பாடு.



படம்-53

அதிபர வளைவின் குவியம் S எனவும் இயக்குவரை ZL எனவும் கொள்வோம்.

இயக்குவரை ZL-க்கு SZ-ஐ செங்குத்தாக வரைக. SZ-ஐ $e>1$ விகிதத்திற்கேற்ப உள்ளும் வெளியும் பிரிக்கும் A, A' புள்ளிகளைக் காண்க.

$$\therefore \frac{SA}{AZ} = \frac{SA'}{A'Z} = e$$

A, A' புள்ளிகள் அதிபர வளைவில் அமையவேண்டும். $AA'=2a$ எனக் கொள்வோம். AA'-ன் நடுப்புள்ளி C ஆகட்டும்.

$$SA = eAZ$$
$$SA' = eZA'$$
$$SA + SA' = e(AZ + ZA')$$

அதாவது $SC - AC + SC + CA' = eAA'$

(அ - து.) $2SC = 2ae$

$\therefore SC = ae$

$$SA' - SA = e(ZA' - AZ)$$
$$= e\{(ZC + CA') - (CA - ZC)\}$$
$$= 2eZC$$
$$\therefore 2a = e2ZC$$
$$\therefore ZC = \frac{a}{e}$$

C-ஐ ஆதியாகவும் CS-ஐ x ஆயமாகவும், C வழி CS-க்குச் செங்குத்தான கோடு CY-ஐ y-ஆயமாகவும் கொண்டால் S-ன் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$

P எனும் அதிபர வளைவின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனவும், P-லிருந்து இயக்குவரைக்கு வரையும் செங்குத்துக்கோடு PM எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore \frac{SP}{MP} = e$$
$$SP^2 = e^2PM^2$$

(அ - து.) $(x_1 - ae)^2 + y_1^2 = e^2(x_1 - CZ)^2 = e^2\left(x_1 - \frac{a}{e}\right)^2$

(அ - து.) $x_1^2 - 2aex_1 + a^2e^2 + y_1^2 = e^2x_1^2 - 2aex_1 + a^2$

(அ - து.) $x_1^2(e^2 - 1) - y_1^2 = a^2(e^2 - 1)$

(அ - து.) $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$

$P(x_1, y_1)$-ன் இயங்குவரை $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$

$a^2(e^2 - 1) = b^2$ எனக் கொள்ளின் அதிபர வளைவின் திட்டச் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ஆகும்.

இது x, y-யில் சமச்சீருடன் இருப்பதால் மற்றொரு குவியம், மற்றொரு இயக்குவரை இருக்கவேண்டும் என்றுகிறது. இவை முறையே $S'(-ae, 0)$, $Z'M'\left(x = -\dfrac{a}{e}\right)$ என்பன.

3. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. அதிபர வளைவு வரைதல்.

இச் சமன்பாட்டில் $y=0$ எனக்கொள்ளின் $x=\pm a$.

$\therefore$ அதிபர வளைவு $(a, 0)$, $(-a, 0)$ புள்ளிகள் அதாவது A, A' வழிச் செல்லும்.

A, A' அதிபர வளைவின் முனைகள் (vertices) எனப்படும்.

$x=0$ எனின் $y=\pm ib$.

$\therefore$ அதிபர வளைவு y-ஆயத்தை வெட்டாது.

இச் சமன்பாட்டை $y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$ என்று எழுதலாம்.

$x^2<a^2$ அதாவது $x<a$ அல்லது $x>-a$ என்றிருந்தால் y-க்குக் கற்பனை மதிப்புகள் வருமாதலால் A-க்கு இடமும் A'-க்கு வலமும் வளைவரை வராது.

அதிபர வளைவு x, y ஆயங்களோடு சமச்சீர் உடைத்தாதலின் (x, y) புள்ளி அதிபர வளைவில் இருப்பின் $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ புள்ளிகளும் அதிபர வளைவில் இருக்கும். மேலும் (x, y), $(-x, -y)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு ஆதிவழிச் செல்வதால் C வழிச் செல்லும் நாண்கள் அனைத்தையும் C சமமாகப் பிரிக்கும். C அதிபர வளைவின் மையம் எனப்படும்.

x-ன் மதிப்பு எண்ணிலிக்குக் கூடிச் செல்லச்செல்ல y-ன் மதிப்பும் அன்னதாகும்.

அதிபர வளைவு தம்முள் வெட்டிக் கொள்ளாத இருபகுதிகளைக் கொண்டதாகும்.

y-ஆயத்தில் $CB=CB'=b$ என்றிருக்க B, B' புள்ளிகளை எடுப்பின் BB' அதிபர வளைவின் துணையச்சு (conjugate axis), $AA'=2a$ என்பது குறுக்கச்சு (tranverse axis) எனப்படும்.

4. செவ்வகலம் (Latus-rectum)

குவியம் வழிச்செல்லும் LL' எனும் இரட்டைக் குத்தாயம் செவ்வகலம் எனப்படும்.

$$\begin{aligned} SL &= eSZ \\ &= Ce(S-CZ) \\ &= e\left(ae-\frac{a}{e}\right) \end{aligned}$$

$$= a(e^2-1)$$
$$= \frac{b^2}{a}$$

$$\text{செவ்வகம்} = 2SL = \frac{2b^2}{a}$$

5. அதிபரவளைவின் புள்ளி ஒன்று P எனின் $S'P \sim SP = 2a$.

$$S'P = ePM'$$
$$SP = ePM$$
$$S'P - SP = e(PM' - PM)$$
$$= e(ZZ')$$
$$= e \cdot 2CZ$$
$$= e \cdot 2 \cdot \frac{a}{e}$$
$$= 2a.$$

6. நீள் வட்டச் சமன்பாட்டில் b^2க்குப் பதில் $-b^2$ஐ ஈடாக்க அதிபர வளைவின் சமன்பாடு வருவதால் முன் அதிகாரத்தில் நிறுவின பல முடிவுகளில் b^2க்குப் பதில் $-b^2$ஐ ஈடாக்க வரும் முடிவுகள் அதிபர வளைவிற்குப் பொருந்தும்.

அவையாவன :—

(1) (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோடு $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

(2) (x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோடு $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2$.

(3) $y = mx + c$ அதிபரவளைவைத் தொடுவதற்குரிய நிபந்தனை $c^2 = a^2m^2 - b^2$.

(4) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ கோடு m-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் அதிபர வளைவைத் தொடும்.

(5) குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத் (Director circle) தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

(6) (x_1, y_1)லிருந்து அதிபர வளைவிற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு $SS_1 = T^2$.

(7) துணை வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y = a^2$.

(8) அதிபர வளைவின் S, S' குவியங்களிலிருந்து தொடுகோடு ஒன்றுக்கு வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகள் SY, $S'Y'$ எனின் $SY \cdot S'Y' = -b^2$, Y, Y' புள்ளிகள் துணை வட்டத்தில் இருக்கும்.

(9) (x_1, y_1)-ன் இசைக்கோடு $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

(10) $lx+my+n=0$, $l'x+m'y+n'=0$ கோடுகள் அதிபர வளை வைச் சார்ந்த துணையியக் கோடுகளாகும். நிபந்தனை $a^2ll'-b^2mm' = nn'$.

(11) (x_1, y_1) புள்ளியை நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன் பாடு $T=S_1$

$$(\text{அ - து.}) \quad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$$

(12) $y=mx$, $y=m'x$ துணையிய விட்டங்களாகும் நிபந்தனை $mm' = \frac{b^2}{a^2}$.

7. துணையலகுகள்

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்று பரவளைவின் சமன்பாடு அமைந்துள்ளதால் $(a \sec \theta, b \tan \theta)$ எனும் ஆயத்தொலைகள் 'θ'ன் எல்லா மதிப்பு களுக்கும் சமன்பாட்டைச் சீர் செய்யும். அதனுல் 'θ'வை துணையல காகக் கொள்ளலாம்.

$(a \sec \theta, b \tan \theta)$ எனும் புள்ளியை 'θ' எனக் குறிப்பிடல் மரபு.

8. 'θ' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு $\frac{x \sec \theta}{a} - \frac{y \tan \theta}{b} = 1$, செங்கோடு $ax \sin \theta + by = (a^2+b^2) \tan \theta$ எனக் காணலாம்.

'θ_1', 'θ_2' புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\theta_1-\theta_2}{2} - \frac{y}{b} \sin \frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \cos \frac{\theta_1+\theta_2}{2} \text{ ஆகும்.}$$

9. தொலைத்தொடு கோடுகள் (Asymptotes)

வரையறை : முழுவதும் முடிவிலி (infinity) யில் இல்லாமலும், அதிபரவளைவை முடிவிலிப் புள்ளியில் (point at infinity) தொடும் கோட்டிற்குத் தொலைத் தொடுகோடு (Asymptote) எனப் பெயர்.

$y=mx+c$ என்பது தொலைத்தொடு கோடாவதற்குரிய நிபந்தனை.

$y=mx+c$ கோடும் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ம் வெட்டும் புள்ளிகளின் x-ஆயத் தொலைகள்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1 \text{ சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.}$$

(அ - து.) $x^2(b^2-a^2m^2)-2\,mca^2x-a^2(b^2+c^2)=0$ சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.

$y=mx+c$ தொலைத் தொடுகோடாவதற்குச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் முடிவிலிகளாக இருக்கவேண்டும்.

(அ - து.) $b^2-a^2m^2=0,\ mca^2=0$

$$\therefore \quad m=\pm\frac{b}{a},\quad c=0$$

தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

(அ - து.) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

குறிப்பு: 'θ' இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\theta=\cos\theta.$$

$\theta=\pi/2$ எனில் இது $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ ஆகும். இக்கோடு மையம் C வழிச்செல்லும். இதே போல் $\theta=\frac{3\pi}{2}$ எனில் $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ என்றாகிறது. இவ்விரு தொடுகோடுகளும் அதிபர வளைவை முடிவிலிப் புள்ளியில் தொடுகின்றன. இக்கோடுகளுக்குத் தொலைத் தொடுகோடுகள் எனப் பெயர்.

10. தொலைத் தொடுகோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம்.

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு $y=\pm\frac{b}{a}x$ என்றாகிறது. எனவே இவை அதிபர வளைவின் குறுக்கச்சோடு (Transverse axis) சமகோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும். இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் 2θ எனின் $\tan\theta=\pm\frac{b}{a}$

$$\therefore \quad \sec^2\theta=1+\frac{b^2}{a^2}=e^2$$

$$\therefore \quad \sec\theta=e$$

∴ தொலைத் தொடுகோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம்

$$2\theta=2\sec^{-1}(e).$$

11. அதிபர வளைவுப் புள்ளி ஒன்றிலிருந்து தொலைத் தொடு கோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத் தொகை ஒரு மாறிலி.

அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$

அதிபர வளைவு புள்ளி (x_1, y_1)லிருந்து இக்கோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளம் முறையே

$$\frac{\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}},\quad \frac{\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} \text{ ஆகும்.}$$

இந்நீளங்களின் பெருக்குத் தொகை $=\dfrac{\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$

$$=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\left\{\because \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\right\}$$

$$=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\text{மாறிலி.}$$

12. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ சமன்பாடு ஒரு அதிபரவளைவைக் குறிப்பிடின், அதன் தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு காணல்.

அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (1)

எனின் அதன் தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (2)

இவ்விரு சமன்பாடுகளின் பொது உறுப்புக்களான $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ ஆதியையும், ஆயங்களையும் மாற்றினும் ஒரே கோவையைத் தரும்.

எனவே தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு அதிபர வளைவின் சமன்பாட்டிலிருந்து எண்ணுறுப்பில் மட்டுமே வேறுபட்டிருக்கும்.

∴ தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+k=0$$

இச்சமன்பாடு இரு கோடுகளைக் குறிப்பிடவேண்டும் அல்லது அதிபர வளைவின் மையம் வழிச் செல்லவேண்டும் எனும் நிபந்தனையைப் பயன்படுத்தி k-ன் மதிப்பினைக் காணலாம்.

13. துணையிய அதிபர வளைவு (Conjugate hyperbola)

ஓர் அதிபர வளைவின் குறுக்கச்சைத் துணையச்சாகவும், துணையச்சைக் குறுக்கச்சாகவும் கொண்ட அதிபர வளைவு துணையிய அதிபர வளைவு எனப்படும். எனவே $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-ன் துணையிய அதிபர வளைவு $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ அதாவது $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ ஆகும்.

இவ்விரு அதிபர வளைவுகளுக்கும் தொலைத் தொடு கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ அதாவது இரண்டிற்கும் தொலைத் தொடுகோடுகள் பொதுவானவை.

14. துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு காணல்.

அதிபர வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \text{ எனக் கொள்க.}$$

அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ எனின்

அதன் தொலைத் தொடு கோடுகள், துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடுகள் முறையே $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

இம்மூன்று சமன்பாடுகளின் பொது உறுப்புக்களான $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, ஆதியை மாற்றினும், ஆயங்களை மாற்றினும் ஒரு கோவையைத் தரும். ஆகவே $H=0$, $A=0$, $H'=0$ அதிபர வளைவு தொலைத் தொடு கோடுகள், துணையிய அதிபர வளைவு இவற்றின் சமன்பாடுகள் எனின்

$$H-A=A-H'$$

$$(\text{அ-து.})\ H'=2A-H$$

∴ துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $2A-H=0$.

15. ஓர் அதிபர வளைவின் விட்டம், அதிபர வளைவை மெய்ப் புள்ளிகளில் வெட்டின், இவ்விட்டத்தின் துணையிய விட்டம் அதனைக் கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ என்றும் அதன் ஒரு விட்டம் அதிபர வளைவை $P(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$ $P'(-a\sec\theta,\ -b\tan\theta)$ புள்ளிகளில் வெட்டும் என்றும் கொள்வோம்.

விட்டம் PP'-ன் சமன்பாடு $y=\frac{b\tan\theta}{a\sec\theta}\cdot x$

$$\text{(அ-து.)}\quad y=\frac{bx}{a}\cdot\sin\theta \qquad (1)$$

விட்டம் PP'-ன் துணையிய விட்டத்தின்

$$\text{சமன்பாடு}\quad y=\frac{b}{a}x\cdot\frac{1}{\sin\theta} \qquad (2)$$

அதிபர வளைவும், $y=\frac{b}{a\sin\theta}\cdot x$ கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள் பின்வரும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2\sin^2\theta}=1$$

$$\text{(அ-து.)}\quad x^2(\sin^2\theta-1)=a^2\sin^2\theta$$

$$\text{(அ-து.)}\quad x^2=-a^2\tan^2\theta$$

$$x=\pm ai\tan\theta$$

எனவே, PP'-ன் துணையிய விட்டம், அதிபர வளைவை $(ai\tan\theta,\ ai\sec\theta)$, $(-ai\tan\theta,\ -ai\sec\theta)$ புள்ளிகளில் வெட்டும். இப்புள்ளிகள் கற்பனைப் புள்ளிகளாகும்.

16. அதிபர வளைவின் துணையிய விட்டங்கள், துணையிய அதிபர வளைவிற்கும் துணையிய விட்டங்களாகும்.

அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ என்றும், அதன் துணையிய விட்டங்கள் $y=mx$, $y=m'x$ என்றும் கொண்டால் $mm'=\frac{b^2}{a^2}$.

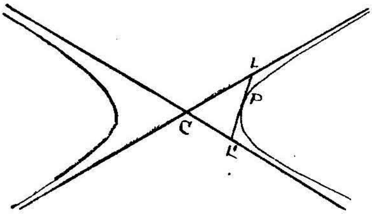
துணையிய அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

$$\text{(அ-து.)}\quad \frac{x^2}{(-a^2)}-\frac{y^2}{(-b^2)}=1$$

$y=mx$, $y=m'x$ கோடுகள் இவ்வதிபர வளைவுக்குத் துணைவிட்டங்களாகும் நிபந்தனை $mm'=+\frac{-b^2}{-a^2}=\frac{b^2}{a^2}$.

$\therefore mm' = \frac{b^2}{a^2}$ எனின் $y = mx$, $y = m'x$ கோடுகள் இரு அதிபர வளைவுகளுக்கும் துணையிய விட்டங்களாகும்.

17. அதிபர வளைவின் தொலைத் தொடு கோடுகளாலும், ஒரு தொடு கோட்டாலும் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு மாறிலியாகும்.



படம்-54

$P(\theta)$யிடத்துத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x \sec \theta}{a} - \frac{y \tan \theta}{b} = 1 \quad (1)$$

தொலைத் தொடுகோடு CLன் சமன்பாடு $y = \frac{b}{a} x \quad (2)$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவைகளை விடுவிக்க

$x = a (\sec \theta + \tan \theta)$, $y = b (\sec \theta + \tan \theta)$

Lன் ஆயத்தொலைகள் $\{a(\sec \theta + \tan \theta),\ b (\sec \theta + \tan \theta)\}$

இதேபோல், L'ன் ஆயத்தொலைகள்

$\{a(\sec \theta - \tan \theta),\ -b(\sec \theta - \tan \theta)\}$

முக்கோணம் CLL'-ன் பரப்பு

$= \frac{1}{2} [a(\sec \theta + \tan \theta)\, b(\sec \theta - \tan) + a(\sec\theta - \tan \theta)\, b(\sec \theta + \tan \theta)]$

$= \frac{ab}{2} (1+1) = ab =$ மாறிலி.

துணைத்தேற்றம்

LL'-ன் மையப்புள்ளி $(a \sec \theta, b \tan \theta)$. இவை P-யின் ஆயத்தொலைகளாகும்.

LL'-ன் மையப்புள்ளியும் P-யும் ஒன்று என்றாகிறது. எனவே, தொலைத் தொடு கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட P-யிடத்துத் தொடுகோட்டை P சமமாகப் பிரிக்கும்.

18. குவியம் S-லிருந்து தொலைத் தொடுகோடு ஒன்றுக்கு வரையும் செங்கோட்டு அடி, ஒத்த இயக்குவரையும் துணை வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகளுள் ஒன்றாகும்.

S-ன் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$

தொலைத் தொடுகோடுகளுள் ஒன்றின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$......(1)

இக்கோட்டின் சாய்வு வீதம் $=\frac{b}{a}$

S-லிருந்து இக்கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு $y=-\frac{a}{b}(x-ae)$ ......(2)

(1), (2) சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின் செங்குத்துக் கோட்டு அடியின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும்.

(1)-லிருந்து $y=+\frac{b}{a}x$

இம்மதிப்பை (2)-ல் ஈடாக்கின் $\frac{b}{a}x=-\frac{a}{b}(x-ae$

(அ - து.) $x\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=\frac{a^2e}{b}$

$$x=\frac{a^2e}{b}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{a^3e}{a^2e^2}=\frac{a}{e}$$

$$y=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{e}=\frac{b}{e}.$$

∴ செங்குத்துக்கோட்டு அடியின் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{a}{e},\frac{b}{e}\right)$.

S-ன் ஒத்த இயக்குவரை $x=\frac{a}{e}$. ஆகையால் இப்புள்ளி இயக்கு வரையில் இருக்கும்.

மையத்திலிருந்து $\left(\frac{a}{e},\frac{b}{e}\right)$ புள்ளியின் தொலை

$$=\sqrt{\frac{a^2}{e^2}+\frac{b^2}{e^2}}=\sqrt{\frac{a^2e^2}{e^2}}=a.$$

∴ **இப்புள்ளி துணைவட்டத்திலும் இருக்கும். எனவே இப்புள்ளி இயக்குவரையும் துணைவட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகளுள் ஒன்றாகும்.**

மாதிரி 1: $4x^2-9y^2=36$ அதிபரவளைவின் ஆயங்கள், குவியம், மையத்தொலை விகிதம், செவ்வகலம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டை $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{a}=1$ என எழுதலாம்.

குறுக்கச்சு $2a=6$, துணையச்சு $2b=4$

$$b^2=a^2(e^2-1)$$
$$4=9(e^2-1)$$
$$e^2-1=\tfrac{4}{9}$$
$$e^2=\tfrac{13}{9}$$
$$e=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

குவியங்களின் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$

அதாவது $(\sqrt{13}, 0)$, $(-\sqrt{13}, 0)$ ஆகும்.

செவ்வகலம் $=\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{3}$.

மாதிரி 2: அதிபரவளைவின் மையம் $(-1, 2)$; குவியம் $(5, 2)$, மையத் தொலைத்தகவு $\frac{3}{2}$ எனின் அதன் சமன்பாடு என்ன?

$C(-1, 2)$, $S(5, 2)$ எனின்

$$CS=\sqrt{(5+1)^2+(2-2)^2}=6=ae.$$

$$CA=a=\frac{6}{e}=\frac{6}{3}\cdot 2=4.$$

$$CZ=\frac{a}{e}=\frac{4}{3/2}=\frac{8}{3}.$$

C, S, Z புள்ளிகள் $y=2$ கோட்டில் இருப்பதால் $Z(\frac{5}{3}, 2)$

ஆகவே Z வழிச் செல்லும் இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x=\frac{5}{3}$

$P(x, y)$ அதிபரவளைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியானால்,

$SP^2=e^2PM^2$ (PM இயக்குவரைக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு).

$$(x-5)^2+(y-2)^2=(\tfrac{3}{2})^2(x-\tfrac{5}{3})^2.$$
$$x^2-10x+25+y^2-4y+4=\tfrac{9}{4}\{x^2-\tfrac{10}{3}x+\tfrac{25}{9}\}$$
$$4x^2-40x+100+4y^2-16y+16=9x^2-30x+25$$
$$5x^2-4y^2+10x+16y-91=0.$$

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $5x^2-4y^2+10x+16y-91=0$ ஆகும்.

மாதிரி 3 : $y^2=4ax$ பரவளைவைச்சார்ந்த, அதிபரவளைவு $x^2-y^2=a^2$-ன் தொடுகோடுகளின் இசைப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை நீள்வட்டம் $4x^2+y^2=4a^2$ என நிறுவுக.

$y^2=4ax$ பரவளைவைச்சார்ந்த அதிபரவளைவு $x^2-y^2=a^2$-ன் தொடுகோட்டின் இசைப்புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனக் கொள்க.

$P(x_1, y_1)$-ன் இசைக்கோடு $yy_1=2a(x+x_1)$.........(1)

$$(\text{அ - து.}) \quad y = \frac{2a}{y_1}x+\frac{2ax_1}{y_1}$$

இக்கோடு $x^2-y^2=a^2$ அதிபரவளைவைத் தொடுவதால்

$$x^2-\frac{4a^2(x+x_1)^2}{{y_1}^2}=a^2.$$

$$x^2\left\{1-\frac{4a^2}{{y_1}^2}\right\}-\frac{8a^2}{{y_1}^2}x_1x-\left\{\frac{4a^2{x_1}^2}{{y_1}^2}+a^2\right\}=0$$

இச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமாயிருத்தல் வேண்டும்.

எனவே, $$\frac{64a^4}{{y_1}^4}{x_1}^2+4\left(1-\frac{4a^2}{{y_1}^2}\right)\left(\frac{4a^2{x_1}^2}{{y_1}^2}+a^2\right)=0$$

$$\frac{16a^4{x_1}^2}{{y_1}^4}+\frac{4a^2{x_1}^2}{{y_1}^2}+a^2-\frac{16a^4{x_1}^2}{{y_1}^4}-\frac{4a^4}{{y_1}^2}=0$$

$$4{x_1}^2+{y_1}^2=4a^2.$$

$P(x_1, y_1)$-ன் இயங்குவரை $4{x_1}^2+{y_1}^2=4a^2$.

மாதிரி 4 : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் செங்கோட்டு நாண்களின் இசைப்புள்ளிகள் தம் இயங்குவரை $\frac{a^6}{x^2}-\frac{b^6}{y^2}=(a^2+b^2)^2$ என நிறுவுக.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் 'θ' இடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\sec\theta}+\frac{by}{\tan\theta}=a^2+b^2 \qquad ....(1)$$

இதன் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக்கொள்ளின் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$ ....(2)

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே கோட்டினைக் குறிப்பதால்

$$\frac{x_1}{a^2}\Big/\frac{a}{\sec\theta}=-\frac{y_1}{b^2}\Big/\frac{b}{\tan\theta}=\frac{1}{a^2+b^2}$$

(அ - து.) $\dfrac{x_1 \sec\theta}{a^3} = -\dfrac{y_1 \tan\theta}{b^3} = \dfrac{1}{a^2+b^2}$

$$(a^2+b^2)\sec\theta = \frac{a^3}{x_1}$$

$$(a^2+b^2)\tan\theta = -\frac{b^3}{y_1}$$

$$(a^2+b^2)^2(\sec^2\theta - \tan^2\theta) = \frac{a^6}{x_1^2} - \frac{b^6}{y_1^2}$$

$$\frac{a^6}{x_1^2} - \frac{b^6}{y_1^2} = (a^2+b^2)^2$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை $\dfrac{a^6}{x^2} - \dfrac{b^6}{y^2} = (a^2+b^2)^2$

மாதிரி 5 : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவைத் தொடும் $x^2+y^2=a^2$ வட்ட நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$ என நிறுவுக.

$x^2+y^2=a^2$ வட்ட நாண் ஒன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

வட்ட நாணின் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$

(அ - து.) $y = -\dfrac{x_1}{y_1}x + \dfrac{x_1^2+y_1^2}{y_1}$

இந்த நாண் $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ஐத் தொடின்

$$\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}\right)^2 = a^2\left(-\frac{x_1}{y_1}\right)^2 - b^2$$

(அ - து.) $(x_1^2+y_1^2)^2 = a^2x_1^2 - b^2y_1^2$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் இயங்குவரை

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$$

மாதிரி 6 : (1, 1) புள்ளி வழிச் செல்லும் அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள் $x+2y+3=0$, $3x+4y+5=0$ எனின் அதிபரவளைவின் சமன்பாடு என்ன ? துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$(x+2y+3)(3x+4y+5)+k=0$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

அதிபரவளைவு (1, 1) புள்ளி வழிச் செல்லுவதால்

$$72+k=0 \quad \therefore \; k=-72.$$

$\therefore$ அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$(x+2y+3)\,(3x+4y+5)-72=0.$$

(அ - து.) $3x^2+10xy+8y^2+14x+22y-57=0.$

$H'=0$ துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடானால்

$$H'=2A-H.$$

$$=(x+2y+3)\,(3x+4y+5)+72.$$

$\therefore$ துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$3x^2+10xy+8y^2+14x+22y+87=0.$$

மாதிரி 7 : $3x^2-5xy-2y^2+17x+y+14=0$ அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு காண்க.

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$3x^2-5xy-2y^2+17x+y+k=0$ வடிவில் இருக்கும்.

இச்சமன்பாடு இரு கோடுகளைக் குறிப்பிடுவதால்

$$\therefore \; 3(-2)k+2\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{17}{2}\left(-\tfrac{5}{2}\right)-3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-(-2)\left(\tfrac{17}{2}\right)^2-k\left(-\tfrac{5}{2}\right)^2=0$$

(அ - து.) $-6k-\frac{85}{4}-\frac{3}{4}+\frac{289}{2}-\frac{25}{4}k=0$

(அ - து.) $-\dfrac{49k}{4}+\dfrac{490}{4}=0$

$$\therefore \; k=10.$$

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$3x^2-5xy-2y^2+17x+y+10=0.$$

மாதிரி 8 : அதிபரவளைவு, துணையிய அதிபரவளைவுகளின் மையத்தொலை விகிதம் முறையே e_1, e_2 எனின் $\dfrac{1}{{e_1}^2}+\dfrac{1}{{e_2}^2}=1$ என நிறுவுக.

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ எனக் கொள்ளின் அதன் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ ஆகும்.

$$b^2=a^2({e_1}^2-1) \qquad \text{.......(1)}$$

துணையிய அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சு, துணையச்சு இவற்றின் நீளங்கள் முறையே $2b$, $2a$ ஆகும்.

$$\therefore \; a^2=b^2({e_2}^2-1) \qquad \text{.......(2)}$$

(1), (2) சமன்பாடுகளைப் பெருக்கின்

$$a^2b^2 = a^2b^2(e_1^2-1)(e_2^2-1)$$

(அ - து.) $1 = e_1^2e_2^2 - e_1^2 - e_2^2 + 1$

(அ - து.) $e_1^2e_2^2 - e_1^2 - e_2^2 = 0$

(அ - து.) $1 - \frac{1}{e_2^2} - \frac{1}{e_1^2} = 0$

(அ - து.) $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1.$

பயிற்சிகள் 8

1. $2x^2 - 3y^2 = 5$ அதிபரவளைவின் குவியங்கள் இயக்குவரைகள் காண்க. விடை : $\left(\pm\frac{5}{\sqrt{6}}, 0\right)$, $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

2. ஓர் அதிபரவளைவின் குவியம் (1, 2), ஒத்த இயக்குவரை $2x+y-1=0$, மையத் தொலை விகிதம் $\sqrt{3}$ எனின் அதன் சமன்பாடு காண்க. விடை: $7x^2+12xy-2y^2-2x+14y-22=0$.

3. ஓர் அதிபரவளைவின் குவியம் (2, 1), ஒத்த இயக்குவரை $2x+3y-1=0$, மையத் தொலை விகிதம் 2 எனின் அதன் சமன்பாடு காண்க. விடை: $3x^2+48xy+23y^2+36x+2y-61=0$.

4. $9x^2-16y^2+72x-32y-16=0$ அதிபரவளைவின் மையம், மையத் தொலை விகிதம், குவியங்கள், இயக்குவரைகள் ஆகியவற்றைக் காண்க. விடை: மையம் $(-4, -1)$, $e=\frac{5}{4}$.
குவியங்கள் $(1, -1)$, $(-9, -1)$
இயக்குவரைகள் $5x+4=0$, $5x+36=0$.

5. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=m$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{m}$ கோடுகள் m-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒரு அதிபரவளைவில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

6. t-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $x=\frac{2t^2+1}{t^2-1}$, $y=\frac{t(t+2)}{t^2-1}$ எனின் $P(x, y)$ புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு அதிபரவளைவு எனக் காண்பி.

7. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ கோடு அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-ன் தொடு கோடு எனின் $p^2=a^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha$ என நிறுவுக.

8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-ன் P இடத்துச் செங்கோடு துணையச்சை G-ல் வெட்டின் $\frac{SG^2}{SP\cdot S'P}$ நிலை யெண் என நிறுவுக. இங்கு S, S' அதிபர வளைவின் குவியங்களாகும்.

9. $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் புள்ளிகளிலிருந்து $x^2-y^2=a^2$ அதிபர வளைவிற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடு நாண் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $(x^2-y^2)^2=a^2(x^2+y^2)$ என நிறுவுக.

10. (1, 2), (−2, −1), $(-1, -\frac{2}{3})$ புள்ளிகள், $2x^2-3y^2=2$ அதிபர வளைவைச் சார்ந்த தம்முள் துணையியப் புள்ளிகள் (Self Conjugate points) என நிறுவுக.

11. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-ன் குவியங்களை இணைக்குங் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத் தொடுகோடுகளின் அதிபரவளைவினைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளிகள் தம் இயங்குவரை நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2+b^2}$ என நிறுவுக.

12. (3, 2) புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட $16x^2-25y^2=400$ அதிபரவளைவின் நாணின் சமன்பாடு என்ன?

13. (h,k) வழிச் செல்லும் $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{hx}{a^2}-\frac{ky}{b^2}$ என நிறுவுக.

14. $x^2-y^2=a^2$ அதிபரவளைவின் செங்கோட்டு நாண்களின் நடுப் புள்ளிகளின் இயங்குவரை $(y^2-x^2)^3=4a^2x^2y^2$ என நிறுவுக.

15. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடு ஒன்று $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தை, P, Q புள்ளிகளில் வெட்டின் PQ-ன் நடுப்புள்ளியின் இயங்குவரை $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}$ என நிறுவுக.

16. ஓர் அதிபரவளைவின் குவியம் வழிச்செல்லும் நாண்கள் தம் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை மற்றோர் அதிபரவளைவு என நிறுவுக.

17. $9x^2-4y^2=36$ அதிபரவளைவின் $y=3x$ விட்டத்தின் துணையிய விட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

18. $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் நாண்கள், $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவைத் தொடின், அவைகளின் நடுப்புள்ளிகள் $(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$ வளைவரையில் அமையும் என நிறுவுக.

19. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவைச் சார்ந்த $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்திலுள்ள புள்ளியின் இசைக்கோடு நீள் வட்டத்தைத் தொடும் எனக் காண்பி.

20. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் நாண்கள் மையத்திலிருந்து k (நிலை எண்) தூரத்திலிருப்பின், அவைகளின் இசைப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{k^2}$ என நிறுவுக.

21. (h, k) புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபர வளைவிற்கு வரையும் தொடுகோடுகள் x-அச்சோடு α, β கோணங்களைப் பிறப்பிப்பின் $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{2hk}{h^2-a^2}$ என நிறுவுக.

22. அதிபரவளைவின் மையத்தில் செங்கோணம் உண்டுபண்ணும் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை காண்க.

விடை : $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}$

23. (5, 3) புள்ளி வழிச்செல்லும் ஓர் அதிபரவளைவின் மையம் (1, 2), தொலைத் தொடுகோடுகள் $2x+3y=0$, $3x-2y=0$ கோடுகளுக்கு ஒரு போகானவை எனின் அதிபரவளைவின் சமன்பாடு என்ன ?

விடை : $(2x+3y-8)(3x-2y+1)=110$.

24. அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள் $2x+y+4=0$, $4x+3y+1=0$. இவ்வளைவரை $(-1, 2)$ வழிச்செல்லின், இதன் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு என்ன ?

விடை : $(2x+y+4)(4x+3y+1)+12=0$.

25. $3x^2-2y^2+4x-6y=0$ அதிபரவளைவின் (i) தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு, (ii) துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு,

(iii) $y=2x$ கோட்டிற்கு ஒரு போகான நாண்களின் இயங்குவரை ஆகியவற்றைக் காண்க.

விடை : (i) $3x^2-2y^2+4x-6y-\frac{19}{6}=0.$

(ii) $9x^2-6y^2+12x-18y-19=0.$

(iii) $3x-4y-4=0.$

26. $3x^2-5xy-2y^2+5x+11y-8=0$ அதிபரவளேவின் தொலைத் தொடுகோடுகளையும், துணையிய அதிபரவளைவையும் காண்க.

விடை : $3x^2-5xy-2y^2+5x+11y-12=0.$

$3x^2-5xy-2y^2+5x+11y-16=0.$

27. ஓர் அதிபரவளைவின் குவியங்களுள் ஒன்று ஆதி, ஒத்த இயக்கு வரை $x+y+1=0$, மையத்தொலை விகிதம் $\sqrt{2}$ எனின், அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க. விடை: $x+1=0$, $y+1=0$.

28. $x=2$ கோட்டைத் தொடும் அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடு கோடுகள் $x+y+1=0$, $2x-y+2=0$ எனின் அதன் சமன்பாடு என்ன ?

விடை : $(x+y+1)(2x-y+2)=\frac{81}{4}.$

29. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் P இடத்துத் தொடுகோடு தொலைத் தொடுகோடுகளை Q, R புள்ளிகளில் வெட்டின், CQR முக் கோணச் சுற்று வட்ட மையத்தின் இயங்குவரை $4(a^2x^2-b^2y^2)=(a^2+b^2)^2$ என நிறுவுக. இங்கு அதிபரவளைவின் மையம் C ஆகும்.

30. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் மையத்திலிருந்து, அதன் தொடுகோடு ஒன்றிற்கு வரையும் செங்குத்துக்கோடு அதனை Q-ல் சந்தித்தால், Q-ன் இயங்குவரை காண்க.

விடை : $(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2.$

31. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவுக்கு $lx+my+n=0$ கோடு செங் கோடு ஆவதற்குரிய கட்டுப்பாடு என்ன ?

விடை : $\frac{a^2}{l^2}-\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}.$

32. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் செங்கோட்டு நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவரை $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{a^6}{x^2}-\frac{b^6}{y^2}\right)=(a^2+b^2)$ என நிறுவுக.

8. செவ்வக அதிபரவளைவு

(Rectangular hyperbola)

1. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடு $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ என அறிவோம். தொலைத் தொடு கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக இருப்பின், அதாவது தொலைத் தொடு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணம் எனின் அதிபரவளை செவ்வக அதிபரவளைவு எனப்படும்.

தொலைத் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக இருப்பதால்

$$\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$$

(அ - து.) $b^2=a^2$

(அ - து.) $b=a$

∴ செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $x^2-y^2=a^2$. அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள் $y=x$, $y=-x$.

∴ தொலைத் தொடுகோடுகள் குறுக்கச்சோடு 45° சாய்வில் இருக்கும்.

குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2-a^2=0$. இது (0, 0) மையமாகக் கொண்ட புள்ளி வட்டமாகும்.

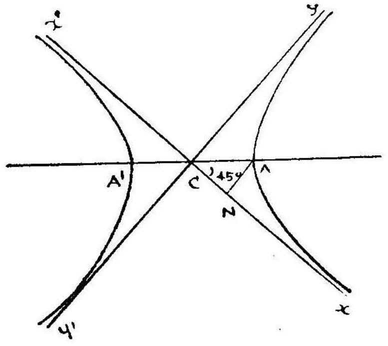
ஆகவே செவ்வக அதிபரவளைவின் குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம் (Director circle) அதன் மையமாகும்.

செவ்வக அதிபரவளைவில் 'θ' எனும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(a\sec\theta, a\tan\theta)$ ஆகும்.

செவ்வக அதிபரவளைவின் மையத் தொலைவிகிதம் $e=\sqrt{2}$ ஆகும்.

2. தொலைத் தொடுகோடுகளை x, y ஆயங்களாகக் கொண்ட செவ்வக அதிபர வளைவின் சமன்பாடு.

தொலைத் தொடு கோடுகள் x, y ஆயங்களாகையால் அவற்றின் சமன்பாடுகள் $x=0$, $y=0$ ஆகும். எனவே தொலைத் தொடு கோடுகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு $xy=0$.



படம்-55

∴ அதிபர வளைவின் சமன்பாடு

$xy=k$ (k ஒரு நிலை எண்)

$AA'=2a$ ஆனால் $CA=a$ ஆகும்.

A-ன் ஆயத்தொலைகள் (CN, NA)

$$CN = CA \cos 45^\circ$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2}}$$
$$NA = CA \sin 45^\circ$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2}}$$

∴ A-ன் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

இப்புள்ளி அதிபர வளைவில் அமைவதால்

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = k$$

$$(\text{அ-து.})\ \frac{a^2}{2} = k$$

∴ செவ்வக அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $xy = \frac{a^2}{2}$

$\frac{a^2}{2} = c^2$ எனக் கொண்டால் இச்சமன்பாடு $xy = c^2$ என ஆகும்.

3. துணையலகு.

$xy=c^2$ சமன்பாட்டை $x=ct$, $y=\frac{c}{t}$ எனும் ஆயத்தொலைகள் (t-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்) சீர் செய்வதால் t-ஐத் துணையலகாகக் கொள்ளலாம். ஆகவே செவ்வக அதிபர வளைவு $xy=c^2$-ல் 't' எனும் புள்ளி $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ புள்ளியாகும்.

4. 't_1', 't_2' புள்ளிகளை இணைக்கும் நாண்.

't_1' புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$

't_2' புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$

ஆகவே 't_1', 't_2' புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-ct_1}{ct_2-ct_1} = \frac{y-\frac{c}{t_1}}{\frac{c}{t_2}-\frac{c}{t_1}}$$

$$(\text{அ-து.})\ \frac{x-ct_1}{c(t_2-t_1)} = \frac{\left(y-\frac{c}{t_1}\right)t_1t_2}{c\,(t_1-t_2)}$$

$$(\text{அ-து.})\ x-ct_1 = -(y-c/t_1)t_1t_2$$

$$(\text{அ-து.})\ x+yt_1t_2 = c\,(t_1+t_2)$$

't_2' புள்ளி 't_1'ஐ அணுகின், 't_1' இடத்துத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

ஆகவே 't_1' இடத்துத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு

$$x+yt_1^2 = 2ct_1$$

இத்தொடு கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= -\frac{1}{t_1^2}$

$\therefore$ 't_1' இடத்துச் செங்கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= t_1^2$

ஆகவே 't_1' இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y-\frac{c}{t_1} = t_1^2\,(x-ct_1)$$

$$(\text{அ-து.})\ y-xt_1^2 = \frac{c}{t_1}-ct_1^3$$

$$(\text{அ-து.})\ y-xt_1^2 = \frac{c}{t_1}(1-t_1^4)$$

5. 't_1' 't_2' இடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி.

't_1' இடத்துத் தொடுகோடு $x+yt_1^2 = 2ct_1$

't_2' இடத்துத் தொடுகோடு $x+yt_2^2 = 2ct_2$

இச்சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின் $x = \frac{2ct_1t_2}{t_1+t_2}$

$$y = \frac{2c}{t_1+t_2}$$

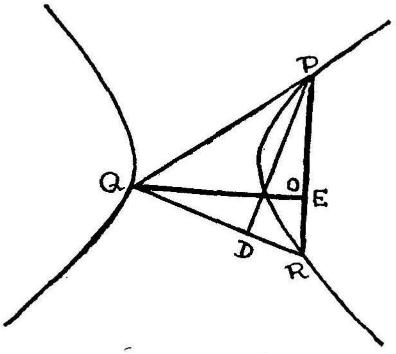
எனவே 't_1' 't_2' இடத்துத் தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$$\left(\frac{2ct_1t_2}{t_1+t_2}, \frac{2c}{t_1+t_2}\right)$$

இப்புள்ளியின் இசைக் கோடு 't_1', 't_2' புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடாகும்.

ஆகவே 't_1', 't_2' புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் இசைப் புள்ளி $\left(\frac{2ct_1t_2}{t_1+t_2}, \frac{2c}{t_1+t^2}\right)$ ஆகும்.

6. ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு ஒரு முக்கோண முனைகள் வழிச் சென்றால் அம்முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் வழியும் அது செல்லும்.



படம்-56

செவ்வக அதிபர வளைவின் சமன்பாடு $xy=c^2$ எனவும் முக் கோணத்தின் முனைகள் $P(t_1)$, $Q(t_2)$, $R(t_3)$ எனவும் கொள்வோம்.

QR-ன் சமன்பாடு $x+yt_2t_3 = C(t_2+t_3)$

QR-ன் சாய்வு வீதம் $-\frac{1}{t_2t_3}$

QR-ன் செங்குத்துக் கோட்டின் சாய்வு வீதம் $= t_2t_3$

PD, QRக்குச் செங்குத்துக் கோடு, எனவே அதன் சமன்பாடு

$$y-\frac{c}{t_1} = t_2t_3(x-ct_1)$$

$$y-t_2t_3x = \frac{c}{t_1}-ct_1t_2t_3 \qquad (1)$$

இதேபோல் PRன் செங்குத்துக் கோடு QEன் சமன்பாடு

$$y-t_1t_3x = \frac{c}{t_2}-ct_1t_2t_3 \qquad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)ஐ விடுவிப்பின்

$$x = -\frac{c}{t_1t_2t_3},\ y = -ct_1t_2t_3$$

∴ முக்கோணம் PQR-ன் செங்கோட்டு மையம்

$$O\left(-\frac{c}{t_1t_2t_3},\ -ct_1t_2t_3\right)$$

இவ்வாயத் தொலைகள் $xy = c^2$ சமன்பாட்டில் பொருந்துவதால் இப்புள்ளி அதிபர வளைவில் இருக்கும்.

இப்புள்ளி 't_4' எனின் $t_1t_2t_3t_4 = -1$

7. ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவின் நான்கு செங்கோடுகள் (h, k) புள்ளிவழிச் செல்லுமெனவும், அச்செங்கோடுகளின் அடிகள் ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளும், அதன் செங்கோட்டு மையமும் ஆகும் என நிறுவுக.

செவ்வக அதிபர வளைவு $xy = c^2$ன் 't' இடத்துச் செங்கோடு (h, k) புள்ளி வழிச் சென்றால்

$$k - ht^2 = \frac{c}{t}(1 - t^4)$$

$$(\text{அ-து.})\quad ct^4 - ht^3 + kt - c = 0 \qquad (1)$$

இது t-ல் நாற்படிச் சமன்பாடு ஆனதால் நான்கு தீர்வுகள் உண்டு. இத்தீர்வு ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒரு செங்கோடு (h, k) புள்ளிவழிச் செல்லும். எனவே (h, k) புள்ளிவழி நான்கு செங்கோடுகள் செல்லும். அவற்றின் அடிகள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனின் சமன்பாடு (1)ன் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3, t_4 ஆகும்.

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{h}{c} \qquad (2)$$

$$\Sigma t_1t_2 = 0 \qquad (3)$$

$$\Sigma t_1t_2t_3 = -\frac{k}{c} \qquad (4)$$

$$t_1t_2t_3t_4 = -1 \qquad (5)$$

t_1, t_2, t_3, t_4 புள்ளிகள் P, Q, R, O எனின்

PQR முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம்

$$\left(-\frac{c}{t_1t_2t_3},\ -ct_1t_2t_3\right)$$

(அ - து.) $\left((ct_4, \frac{c}{t_4}\right)$ சமன்பாடு (5)ன் படி.

எனவே PQR முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் O ஆகும்.

8. செவ்வக அதிபர வளைவும் ஒரு வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள்.

$P\left(ct, \dfrac{c}{t}\right)$ புள்ளி $xy=c^2$ செவ்வக அதிபர வளைவும் $x^2+y^2+2gx+2fy+k=0$ வட்டமும் வெட்டும் புள்ளி எனக் கொள்வோம்.

P வட்டத்திலிருப்பதால்

$$c^2t^2+\frac{c^2}{t^2}+2gct+2f\frac{c}{t}+k=0$$

(அ - து.) $c^2t^4+2gct^3+kt^2+2fct+c^2=0$ ....(1)

இது t-ல் நாற்படிச் சமன்பாடு ஆனதால் நான்கு தீர்வுகள் உண்டு. ஒவ்வொரு தீர்வுக்குத் தக்க ஒரு வெட்டுப்புள்ளி கிடைக்கும். எனவே ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவை ஒரு வட்டம் நான்கு புள்ளிகளில்வெட்டும்.

சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனக் கொண்டால் $t_1t_2t_3t_4=1$.

துணைத் தேற்றம் (i) $P(t_1)$, $Q(t_2)$, $R(t_3)$, $S(t_4)$ ஒரே வட்ட வரையிலுள்ள புள்ளிகள் (concyclic points) ஆனால் $t_1t_2t_3t_4=1$.

$T(t_5)$ முக்கோணம் PQRன் செங்கோட்டு மையம் ஆனால் $t_5=-\dfrac{1}{t_1t_2t_3}=-t_4$

∴ S, T புள்ளிகள் செவ்வக அதிபரவளைவின் விட்ட எதிர் புள்ளிகளாகும் (diametrically opposite points).

(ii) PQ வட்டத்தின் விட்டமானால், அது R புள்ளியில் செங்கோணம் உண்டு பண்ணும். எனவே R முக்கோணம் PQR-ன் செங்கோட்டுமையமாகும்.

(அ - து.) $t_3=-\dfrac{1}{t_1t_2t_3}=-t_4$.

ஆகவே R, S செவ்வக அதிபரவளைவின் விட்டத்தின் நுனிப்புள்ளிகளாகும்.

பயிற்சிகள் 9

1. m-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $y+mx=0$, $y-mx=0$ கோடுகள் $xy=c^2$ன் துணையியவிட்டங்கள் என நிறுவுக.

2. ஒரு புள்ளியின் $y^2=4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த இசைக்கோடு $x^2=4by$ பரவளைவைத் தொடின், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு என நிறுவுக.

3. $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right);\ y=\frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ ஆனால் $P(x, y)$யின் இயங்கு வரை ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவு எனக் காண்பி. 't' இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{t^2+1}+\frac{y}{t^2-1}=\frac{a}{t}$ என நிறுவுக.

4. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபர வளைவின் $2l$ நீளமுடைய நாண்களின் நடுப்புள்ளி இயங்குவரை $(x^2+y^2)(xy-c^2)=l^2xy$ என நிறுவுக.

5. $xy=c^2$-ன் 't_1' இடத்துச் செங்கோடு செவ்வக அதிபர வளைவை மீண்டும் t_2-ல் வெட்டின் $t_2=-\frac{1}{t_1{}^2}$ என நிறுவுக. PQ-ன் நீளம் CP^3க்குத் தக வேறுபடும் என நிறுவுக. (C - செவ்வக அதிபரவளை வின் மையமாகும்).

6. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவின் செங்கோட்டு நாண்களின் இசைப் புள்ளிகளின் இயங்குவரை $(x^2-y^2)^2+4c^2xy=0$ என நிறுவுக.

7. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபர வளைவின் (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) இடத்துச் செங்கோடுகள் (h, k) புள்ளி வழிச் செல்லின்

$$x_1+x_2+x_3+x_4=h$$
$$y_1+y_2+y_3+y_4=k$$ என நிறுவுக.

8. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபர வளைவின் $(2h, 2k)$ வழிச் செல்லும் நாண்கள் தம் நடுப்புள்ளி இயங்கு வரை $(x-h)(y-k)=hk$ என நிறுவுக.

9. (h, k) இடத்துச் சமமாகப் பிரிக்கப்படும் $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவின் நாணின் நீளம்

$$2\sqrt{\frac{(h^2+k^2)(hk-c^2)}{hk}}$$ என நிறுவுக.

10. $x^2=4ay$ பரவளைவின் தொடுகோடு ஒன்று $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டின், PQ-ன் நடுப் புள்ளி ஒரு நிலைத்த பரவளைவில் இருக்குமென நிறுவுக.

11. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபர வளைவின் தொடுகோடுகளின் $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகளின் இயங்குவரை $4c^2xy=a^4$ என நிறுவுக.

12. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபர வளைவும் $y^2=4ax$ பரவளைவும் வெட்டும் புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடுகள் x அச்சோடு முறையே θ, φ கோணங்களில் சாய்ந்திருப்பின் $\tan\theta+2\tan\varphi=0$ என நிறுவுக.

13. ஒரு வட்டம் செவ்வக அதிபரவளைவு ஒன்றை P, Q, R, T புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அதிபரவளைவின் மையம் C, வட்டத்தின் ஆரை r எனின், $CP^2+CQ^2+CR^2+CT^2 = 4r^2$ என நிறுவுக.

14. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவின் ஒரு விட்டம் PP'. P இடத்துத் தொடுகோடும், P' வழி ஓர் தொலைத்தொடு கோட்டிற்கு ஒருபோகாக வரையும் கோடும் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை $xy+3c^2=0$ என நிறுவுக.

15. செவ்வக அதிபரவளைவின் ஒருபோகு நாண்களை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் பொது ஆயமுடைய வட்டங்கள் என நிறுவுக.

16. அதிபரவளைவின் நாண்கள் PQ, RT தம்முள் நேர்குத்தாக இருப்பின் இந்நாற் புள்ளிகளுள் மூன்றால் அமைந்த முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் நாலாவது புள்ளியென நிறுவுக.

17. ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவின் PQ நாண் வளைவரைப் புள்ளி R இடத்துச் செங்கோணத்தைப் பிறப்பிப்பின் R இடத்துச் செங்கோடு, PQக்கு ஒரு போகாக இருக்கும் என நிறுவுக.

18. $xy=c^2$ அதிபரவளைவின் 't_1', 't_2' புள்ளிகளை இணைக்கும் நாண் 't_3', 't_4' புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணிற்குச் செங்குத்தானால், 't_1' 't_3' புள்ளிகளை இணைக்கும் நாண் 't_2', 't_4' புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணிற்குச் செங்குத்தாகும் என நிறுவுக.

19. $x \cos \alpha+y \sin \alpha=p$, $x \cos \alpha'+y \sin \alpha' = p'$ கோடுகள் $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவை வட்டப் புள்ளிகளில் வெட்டுதற்குரிய கட்டுப்பாடு என்ன?

விடை : $\alpha+\alpha' = 2n\pi$

20. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவை ஒரு வட்டம் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகளின் பெருக்குத் தொகை c^4 என நிறுவுக.

21. ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவின் துணையிய இரு விட்டங்கள் தொலைத்தொடு கோடுகளோடு சமச்சாய்வுடையனவாக இருக்கும் என நிறுவுக.

II. கனவடிவ கணிதம்

(SOLID GEOMETRY)

9. செவ்வக கார்ட்டீசியன் ஆயத் தொலைவு களும் திசை கொசைன்களும்

(Rectangular cartesian Co-ordinates and Direction cosines)

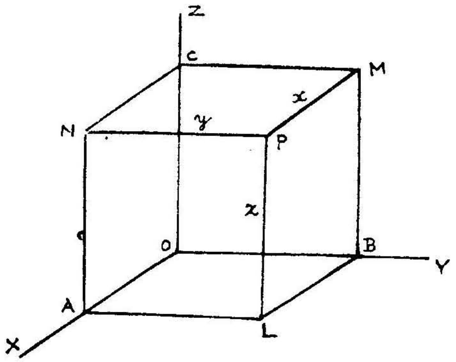
1. சூழ்வெளியில் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகள்.

ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Oவின் வழியே $X'OX$, $Y'OY$, $Z'OZ$ என்ற மூன்று கோடுகள் வரை. O ஆய ஆதி (origin) என்றும், $X'OX$, $Y'OY$, $Z'OZ$ ஆகிய கோடுகள் ஆயங்கள் (co-ordinate axes) என்றும் கூறப்படும். இவை முறையே x-ஆயம், y-ஆயம், z-ஆயம் என்று கூறப்படும். XOY, YOZ, ZOX என்ற தளங்கள் (planes) ஆயத் தளங்கள் (co-ordinate planes) எனப்படும். இவை முறையே XY, YZ, ZX-தளங்கள் எனவும் குறிக்கப்படுகின்றன. மூன்று ஆயங் களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்குமானால் அவற்றைச் செவ்வக கார்ட்டீசியன் ஆயங்கள் (Rectangular Cartesian Co-ordinates) எனக் கூறுகின்றோம்.

P என்பது சூழ்வெளி (space) யிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி யெனில் அதன் ஆயத் தொலைகளைக் காண, அதன் வழியாக, ஆயத் தளங்களுக்கு இணையாக மூன்று தளங்கள் வரைக. அவை ஆயங்கள் $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$ஐ முறையே A, B, C என்ற புள்ளிகளில் சந்திக் கட்டும். OA, OB, OCயின் நீளங்களை Pயின் ஆயத்தொலைகள் எனக் கூறுகின்றோம். இவற்றை முறையே x, y, z எனக் குறிக்கின்றோம். எனவே ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள், அதனின்று

YOZ, ZOX, XOY என்ற தளங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்து உயரங்களாகும்.

மாருக ஒரு புள்ளியின் x, y, z ஆயத் தொலைவுகள் கொடுக்கப் பட்டால், அப்புள்ளியை நிர்ணயிக்க முடியும். இதற்கு OX, OY, OZல் முறையே x, y, z நீளங்கள் இருக்குமாறு OA, OB, OC என்ற நீளங் களை எடுத்துக் கொள். A, B, Cயின் வழியாக OX, OY, OZக்குச் செங்குத்தான தளங்கள் வரைக. இம் மூன்று தளங்களும் சந்திக்கும் புள்ளியே தேவையான புள்ளியாகும்.



படம் - 57

ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகள் கூட்டெண்களாகவோ (+ve numbers), கழிவெண்களாகவோ (−ve numbers) இருக்கலாம். A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஆயங்களின் கூட்டு திசைகளில் (+ve directions) அதாவது OX, OY, OZன் திசைகளில் இருக்குமானல் x, y, zஐக் கூட்டெண்களாகவும், எதிர் திசைகளில் அதாவது OX', OY', OZ'ன் திசைகளில் இருக்குமானல் அவற்றைக் கழிவெண்களா கவும் கொள்கின்ரேம்.

சூழ்வெளி முழுவதும் ஆயத் தளங்களால் எட்டுப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன. இவற்றை அரைக்கால் கோளங்கள் (octants) என அழைக்கின்ரேம். இதிலிருந்து, ஒரே எண்ணளவுள்ள (numerical values) ஆயத்தொலைகளைக் கொண்ட 8 புள்ளிகள், ஒவ்வொரு அரைக் கால் கோளத்திற்கு ஒன்று வீதமாக உள்ளது என்பது தெளிவாகிறது.

ஒரு புள்ளியின் z-ஆயத்தொலை, அதனின்று XY தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து உயரம் என்பதால், XY தளத்திலுள்ள புள்ளி களின் z-ஆயத்தொலைகள் சூன்னம் (zero) என்பது தெளிவாகின்றது.

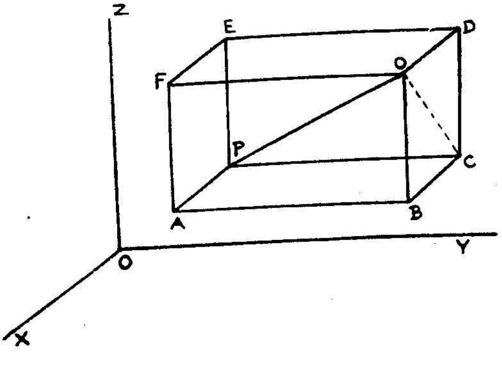
மாருக, ஒரு புள்ளியின் z-ஆயத்தொலைவு சுன்னமெனில் அப்புள்ளி XY தளத்தில் உள்ளது எனக் கூறலாம். எனவே XY தளத்தின் சமன்பாடு $z=0$ ஆகும். இவ்வாறே YZ, ZX தளங்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $x=0$, $y=0$ ஆகும்.

ஒரு புள்ளி x ஆயத்தில் இருப்பின் அதன் y, z ஆயத் தொலைகள் சுன்னமாகும். எனவே x ஆயத்தை $y=0$, $z=0$ என்ற ஒருங்கமை சமன்பாடுகளால் குறிக்கலாம். இவ்வாறே y, z ஆயங்களை முறையே $z=0$, $x=0$; $x=0$, $y=0$ என்ற ஒருங்கமை சமன்பாடுகளால் குறிக்கலாம்.

படம் 57-லிருந்து ஆய ஆதியை o, o, o என்றும் A, B, C என்ற புள்ளிகளை முறையே (x, o, o), (o, y, o), (o, o, z) என்றும், L, M, N என்ற புள்ளிகளை முறையே (x, y, o), (o, y, z), (x, o, z) என்றும் குறிக்கின்ருேம்.

2. இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரம்.

P, Q என்ற புள்ளிகள் (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) எனக்கொள்வோம். PQவை மூலை விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு செவ்வக இணைகரத்திண்மம் (Rectangular parallelopiped) அமையுமாறு P, Qவின் வழியாக ஆயத்தளங்களுக்கு இணையான தளங்கள் வரைக. $APEF$ என்பது



படம் - 58

XOZக்கு இணையான தளமாகும். Pயின் y-ஆயத்தொலை y_1 என்பதால் இரண்டு தளங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் y_1 ஆகும். இவ்வாறே $BCDQ$, XOZ என்ற தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் y_2.

$\therefore$ $APEF$, $BCDQ$ என்ற தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம்

$$PC = y_2 - y_1$$

இவ்வாறே $PE = z_2 - z_1$, $PA = x_2 - x_1$

$C\hat{B}Q = 90°$ $\quad \therefore CQ^2 = CB^2 + BQ^2$

PC, $BCDQ$ தளத்திற்குச் செங்குத்து

$\therefore PC \perp CQ$ $\quad \therefore PQ^2 = PC^2 + CQ^2$

$$\begin{aligned} \text{எனவே } PQ^2 &= PC^2 + CB^2 + BQ^2 \\ &= PC^2 + PA^2 + PE^2 \quad \because PA = CB,\ PE = BQ \\ &= (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ \therefore \quad PQ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \end{aligned}$$

துணை முடிவு : Q ஆய ஆதியுடன் பொருந்துமானல், ஆய ஆதியிலிருந்து Pக்கு உள்ள தூரம் $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ ஆகும்.

மாதிரி 1 : (1, 2, 3), (−2, 3, 5), (7, 0, −1) என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமைப் புள்ளிகள் (**collinear points**) என நிரூபி.

(1, 2, 3), (−2, 3, 5), (7, 0, −1) புள்ளிகளை முறையே A, B, C எனக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} \text{எனவே } AB^2 &= (-2-1)^2 + (3-2)^2 + (5-3)^2 \\ &= 9 + 1 + 4 \\ &= 14 \\ BC^2 &= (7+2)^2 + (0-3)^2 + (-1-5)^2 \\ &= 81 + 9 + 36 \\ &= 126 \\ CA^2 &= (1-7)^2 + (2-0)^2 + (3+1)^2 \\ &= 36 + 4 + 16 \\ &= 56 \\ AB &= \sqrt{14}; \quad BC = 3\sqrt{14}; \quad CA = 2\sqrt{14} \\ AB + CA &= \sqrt{14} + 2\sqrt{14} = 3\sqrt{14} = BC \end{aligned}$$

$\therefore$ A, B, C என்ற புள்ளிகள் கோட்டமைப் புள்ளிகளாகும்.

மாதிரி 2 : (−2, 5, 8), (−3, 4, 4), (−6, 7, 4) என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணம் இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணம் (**Right angled isosceles triangle**) என நிரூபி.

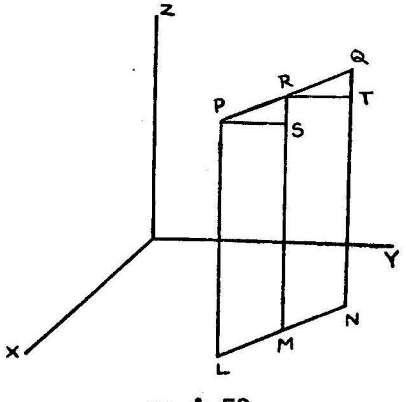
(−2, 5, 8), (−3, 4, 4), (−6, 7, 4) புள்ளிகளை முறையே A, B, C எனக் கொள்வோம்.

$$AB^2 = (-3+2)^2+(4-5)^2+(4-8)^2$$
$$= 1+1+16=18$$
$$BC^2 = (-6+3)^2+(7-4)^2+(4-4)^2$$
$$= 9+9+0=18$$
$$CA^2 = (-2+6)^2+(5-7)^2+(8-4)^2$$
$$= 16+4+16=36$$
$$\therefore\ CA^2 = AB^2+BC^2.\quad AB=BC$$

எனவே ΔABC ஒரு இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணம்.

3. இருபுள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டைக் கூறிடுதல்.

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளாக இருக்கட்டும். PQ-வை ($R(x, y, z)$ என்ற புள்ளி $m : n$ விகிதத்தில் உட்புறமாகக் கூறிடட்டும்.



படம் 59

XY தளத்திற்கு PL, QM, RN என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. இம் மூன்று செங்குத்துக் கோடுகளும் ஒரே தளத்தில் அமையும். எனவே L, M, N புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும். மேலும் RN, QM என்ற நேர்கோடுகளுக்கு முறையே PS, RT என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. ΔPRS, ΔRQT வடிவொத்தவை என்பது தெளிவு.

$$\frac{RS}{QT}=\frac{PR}{RQ}=\frac{m}{n}$$
$$RS=RN-SN=RN-PL=z-z_1$$
$$QT=QM-TM=QM=RN=z_2-z$$

$$\therefore \frac{z-z_1}{z_2-z}=\frac{m}{n}$$

$$\therefore z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}.$$

இவ்வாறே P, R, Q-விலிருந்து முறையே YZ, ZX தளங்களுக்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைவதன் மூலம் $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$; $y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$ எனக் காண்பிக்கலாம்.

எனவே $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டை ஒரு புள்ளி உட்புறமாக $m:n$ விகிதத்தில் கூறிடுமானால் அதன் ஆயத் தொலைகள் $\left\{\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}, \dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}\right\}$ ஆகும்.

குறிப்பு : R என்ற புள்ளி PQ-வை வெளிப்புறமாக $m:n$ விகிதத்தில் கூறிடட்டும். அதாவது PQ-வை R, $m:-n$ என்ற விகிதத்தில் கூறிடுகின்றது. எனவே R-ன் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\frac{mn_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right) \text{ ஆகும்.}$$

துணை முடிவு 1 : (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் மையப் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

துணை முடிவு 2 : $\dfrac{m}{n}=\lambda$ எனக் கொள்வோம். அதாவது PQ-வை R என்ற புள்ளி $\lambda:1$ விகிதத்தில் கூறிடுவதாகக் கொள்வோம். எனவே அப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right) \text{ ஆகும்.}$$

λ-வை மாறுஞ் சாரா மாறி (variable parameter) எனக் கொண்டால், அதாவது அனைத்து கூட்டு, கழிவு மதிப்புகளையும் ஏற்கக் கூடியதாகக் கொண்டால், (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளை மேற்கூறிய வடிவில் எழுதலாம்.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் கொடுக்கப்படுமானால் அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தின் (centroid) ஆயத்தொலைகளைக் காணல்.

ABC என்ற முக்கோணத்தின் உச்சிகளை முறையே (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) எனக் கொள்வோம். BC-யின் மையப் புள்ளி D எனில் அதன் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

நடுக்கோட்டு மையத்தினை $G(x, y, z)$ எனக் கொள்வோமானால் அப்புள்ளி AD-ஐ $2:1$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகக் கூறிடும்.

$$\therefore \; x = \frac{2.\frac{x_2+x_3}{2}+1.x_1}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$\text{இவ்வாறே } y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

$\therefore$ முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

மாதிரி 3: (2, 5, −4), (1, 4, −3) (4, 7, −6), (5, 8, −7) என்ற புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகள் என நிரூபி.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை முறையே A, B, C, D எனக் கொள்வோம்.

$$AC\text{-யின் மையப்புள்ளி} \left(\frac{2+4}{2}, \frac{5+7}{2}, \frac{-4-6}{2}\right)$$

$$\text{அதாவது } (3, 6, -5).$$

$$BD\text{-யின் மையப்புள்ளி} \left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+8}{2}, \frac{-3-7}{2}\right)$$

$$\text{அதாவது } (3, 6, -5).$$

ஆகையால் $ABCD$ நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்கள் AC, BD ஒன்றையொன்று மையப்புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. ஆகையால் $ABCD$ ஒரு இணைகரமாகும்.

மாதிரி 4: $A(4, 3, 2)$ $B(1, 2, -3)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு YOZ, XOY என்ற தளங்களை C, D புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. C, D-யின் ஆயத்தொலைகளையும், C, D, AB-ஐக் கூறிடும் விகிதங்களையும் கண்டுபிடி.

AB-ஐ $\lambda : 1$ விகிதத்தில் கூறிடும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\frac{\lambda+4}{\lambda+1}, \frac{2\lambda+3}{\lambda+1}, \frac{-3\lambda+2}{\lambda+1}\right).$$

இப்புள்ளி YOZ தளத்தில் இருக்குமானால் அதன் x ஆயத்தொலை சுன்னமாகும்.

$$\therefore\ \frac{\lambda+4}{\lambda+1}=0 \quad \therefore\ \lambda=-4.$$

λ கழிவெண்ணாக இருப்பதால், C AB-ஐ $4:1$ விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகக் கூறிடுகின்றது.

C-யின் ஆயத்தொலைகள் $(0, \frac{5}{3}, -\frac{14}{3})$.

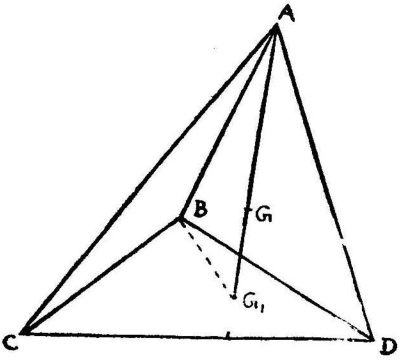
மேற்கூறிய புள்ளி XOY தளத்தில் இருக்குமானால் அதன் z ஆயத்தொலை சுன்னமாக இருத்தல் வேண்டும்.

$$\frac{-3\lambda+2}{\lambda+1}=0 \quad \therefore\ 3\lambda=2 \quad \therefore\ \lambda=\frac{2}{3}$$

λ ஒரு கூட்டெண்ணாக இருப்பதால் D, AB-ஐ உட்புறமாக $2:3$ விகிதத்தில் கூறிடுகின்றது.

D-யின் ஆயத்தொலைகள் $(\frac{14}{5}, \frac{13}{5}, 0)$.

மாதிரி 5: (x_r, y_r, z_r) $r=1, 2, 3, 4$-ஐ உச்சிகளாகக் கொண்ட நான்முகத்தின்மத்தின் (Tetrahedron) புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் (Centre of Gravity) காண். BCD முக்கோணத்தையும், அதன் தளத்தில் அமையாத A என்ற புள்ளியையும் எடுத்துக் கொள்.



படம் - 60

AB, AC, ADஐச் சேர். BCD, DBA, ABC, ACD நான்முகத்தின்மத்தின் பக்கங்களாகும். A, B, C, D உச்சிகளாகும்.

BCDன் நடுக்கோட்டு மையத்தை (Centroid) G_1 எனக்கொண்டால் அதன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3}, \frac{y_2+y_3+y_4}{3}, \frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right)$

ஆகும். நான்முகத்தின்மத்தின் புவிஈர்ப்பு மையம், ஓர் உச்சியையும் அதன் எதிர்ப்பக்கத்தின் நடுக்கோட்டு மையத்தையும் சேர்க்கும் நேர் கோட்டில் இருப்பதுடன் அதனை 3 : 1 விகிதத்தில் கூறிடும். புவிஈர்ப்பு மையத்தை $G\ (x,\ y,\ z)$ எனக் கொண்டால்

$$x = \frac{3\dfrac{x_2+x_3+x_4}{3}+1\cdot x_1}{4} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$$

இவ்வாறே $y = \dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$

$$z = \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}$$

இதன் சமச்சீர் வடிவத்தின் காரணமாக இதர உச்சிகளையும் அவை எதிரே உள்ள நடுக்கோட்டு மையங்களையும் சேர்க்கும் கோடுகள் இவ் விதமே 3 : 1 விகிதத்தில் பிரிக்கப்படும்.

5. இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம்.

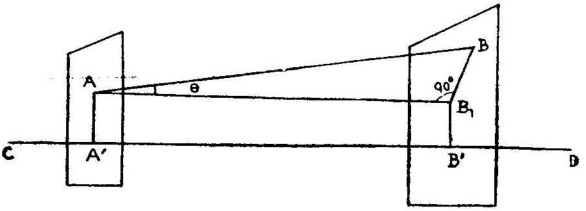
சூழ்வெளியிலுள்ள இருகோடுகள் வெட்டிக்கொள்ள வேண்டுமென்ற அவசியமில்லை. அவ்வாறுன கோடுகள் வெட்டாக் கோடுகள் (Skew lines) என அழைக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறுன இருகோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் ஏதேனும் ஒருபுள்ளி வழியாக அவற்றிற்கு இணையாக வரையப்படும் நேர்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணத் திற்குச் சமம்.

6. விழ்ச்சி (Projection) : ஒரு நேர் கோட்டின் மீது ஒரு புள்ளி யின் வீழ்ச்சியானது அப்புள்ளியிலிருந்து அந்நேர் கோட்டிற்கு வரை யப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியாகும். இதையே புள்ளியின் வழியாக நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் தளம், நேர் கோட்டைச் சந்திக்கும் புள்ளியாகக் கொள்ளலாம்.

ஒரு நேர்கோட்டின்மீது மற்றெரு முடிவுற்ற நேர்கோட்டின் வீழ்ச்சி யானது, முதல் நேர்கோட்டில் இரண்டாவது நேர்கோட்டின் இரண்டு முனைகளின் வீழ்ச்சிகளுக்கு இடையிலுள்ள பகுதியாகும். உதாரண மாக l என்ற நேர்கோட்டின்மீது AB என்ற நேர்கோட்டின் இருமுனை களாகிய A, Bயின் வீழ்ச்சி A_1, B_1 எனில், lன்மீது ABயின் வீழ்ச்சி $A_1\,B_1$ ஆகும்.

7. AB, CD என்ற இரு கோடுகளுக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் θ எனில், CDயின்மீது ABயின் வீழ்ச்சி $AB\cos\theta$ ஆகும்.

A, Bயின் வழியாக CDக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட தளங்கள் CDயை முறையே A', B' புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும். எனவே $A'\ B'$ என்பது CDயின்மீது ABயின் வீழ்ச்சியாகும். A வழியாக CDக்கு



படம் - 61

இணையாகவும் B வழிச் செல்லும் தளத்தை B_1ல் சந்திக்குமாறும் ஒரு நேர்கோடு வரை. இந்நேர்கோடு B வழிச் செல்லும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். $\therefore\ B\hat{A}B_1 = \theta$. மேலும் B வழிச் செல்லும் தளத்திற்கு AB_1 செங்குத்தாக இருப்பதாலும், BB_1 அத்தளத்திலிருப்பதாலும் $A\hat{B}_1\ B = 90°$

$$\therefore\ AB_1 = AB\cos\theta \quad \text{ஆனால்}\ AB' = A'B'$$

$$\therefore\ A'B' = AB\cos\theta$$

அதாவது CDயின்மீது ABயின் நீட்சி $AB\cos\theta$வுக்குச் சமம்.

8. A_1, A_2, A_3.........A_n என்பன n–புள்ளிகள். l என்பது ஏதேனும் ஒரு நேர்கோடு. lன்மீது $A_1\ A_2$, $A_2\ A_3$,......$A_{n-1}\ A_n$ என்ற துண்டு நேர்கோடுகளின் வீழ்ச்சிகளின் கூடுதலானது, lன் மீது $A_1\ A_n$ன் வீழ்ச்சிக்குச் சமம்.

lன்மீது A_1, A_2, A_3......A_nன் வீழ்ச்சியை முறையே B_1, B_2, B_3......B_n என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே $A_1\ A_2$வின் வீழ்ச்சி $B_1\ B_2$, $A_2\ A_3$யின் வீழ்ச்சி $B_2\ B_3$,......$A_{n-1}\ A_n$ன் வீழ்ச்சி $B_{n-1}\ B_n$ ஆகும். B_1, B_2, B_3......B_n அனைத்தும் lன்மீது இருப்பதால் $B_1\ B_2 + B_2\ B_3 + \cdot + B_{n-1}\ B_n = B_1\ B_n$. எனவே - $A_1\ A_2$, $A_2\ A_3$,......$A_{n-1}\ A_n$ என்ற துண்டு கோடுகளின் வீழ்ச்சிகளின் இயற்கணிதக் கூடுதலானது $A_1\ A_n$ வீழ்ச்சிக்குச் சமம்.

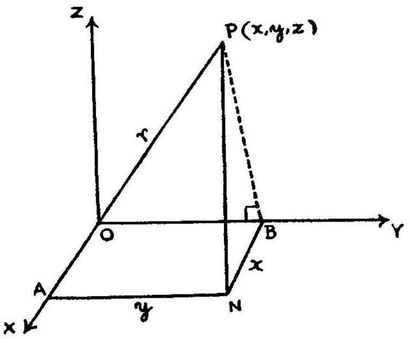
9. நேர்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் (Direction Cosines)

ஒரு நேர்கோடானது x, y, z ஆயங்களின் கூட்டு திசைகளில் முறையே α, β, γ என்ற கோணங்களை ஏற்படுத்துமானால், அந்நேர்

கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. அவற்றினை l, m, n என்றும் குறிக்கலாம். இம்மூன்றுடனும் விகித சமத்திலுள்ள எண்களைத் திசைவிகிதங்கள் (Direction Ratios) எனக் கூறுகின்றோம்.

$P(x, y, z)$ ஏதேனும் ஒரு புள்ளியானால் OPயின் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$. $(OP = r)$

Pயிலிருந்து OYக்கு PB என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக. PN, xy தளத்திற்குச் செங்குத்து. (NB, NA முறையே x ஆயத்திற்கும், y ஆயத்திற்கும் ஒரு போகாக வரைக.)



படம் - 62

$OB = AN = y$ ஆனால் OB, OYயின் மீது OPயின் வீழ்ச்சி.

$P\hat{O}B = \beta$ எனில்

$$OB = OP\cos\beta,$$

$$y = r\cos\beta = mr$$

$$m = \frac{y}{r}$$

இவ்வாறே $l = \frac{x}{r}$, $n = \frac{z}{r}$ என நிரூபிக்கலாம்.

கிளைத்தேற்றம் or துணைமுடிவு

OX, OY, OZ-ன் திசைக் கொசைன்கள் முறையே (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

10. திசைக் கொசைன்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு.

ஒரு நேர்கோட்டின் திசைக் கொசைன்களை l, m, n எனக்கொள். O-வின் வழியாகக் கொடுத்துள்ள நேர்கோட்டிற்கு இணையாக OP என்ற நேர்கோடு வரை. OP-யின் திசைக் கொசைன்களும் l, m, n ஆகும்.

P-ன் ஆயத்தொலைகளை (x, y, z) என்றும் $OP = r$ என்றும் கொண்டால் OP-யின் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$.

$$\therefore\ l = \frac{x}{r},\ m = \frac{y}{r},\ n = \frac{z}{r}$$

$$OP^2 = x^2+y^2+z^2 = r^2.$$

(அ - து.) $\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{z}{r}\right)^2 = 1$

(அ - து.) $l^2+m^2+n^2 = 1.$

11. திசை விகிதங்கள் (Direction - Ratios)

ஒரு நேர்கோட்டின் திசைக் கொசைன்களுடன் விகிதப் பொருத்தத்தில் அமையும் மூன்று எண்களுக்கு அந்நேர் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் என்று பெயர்.

ஒரு நேர்கோட்டின் திசைக் கொசைன்களை $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ எனவும், திசை விகிதங்களை a, b, c எனவும் கொள்வோமெனில்

$$\cos\alpha = ak, \quad \cos\beta = bk, \quad \cos\gamma = ck.$$

வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = k^2(a^2+b^2+c^2)$

அ - து. $\frac{1}{k^2} = a^2+b^2+c^2$

$$\therefore \quad k = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

எனவே $\cos\alpha = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\beta = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,

$$\cos r = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

இங்கு மூன்று திசைக் கொசைன்களுக்கும் கூட்டுக்குறி அல்லது கழிவுக்குறியை எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

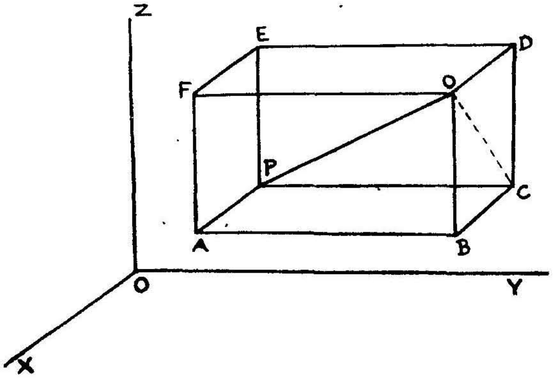
எனவே ஒரு நேர் கோட்டின் திசையை நிர்ணயிக்க அதன் திசை விகிதங்கள் தெரிந்தால் போதுமானது.

குறிப்பு: l, m, n என்பவை திசைக் கொசைன்களாக இருந்தால் மட்டும் $l^2+m^2+n^2=1$ என்ற தொடர்பு உண்மையானதாக இருக்கும்.

12. l, m, n-ஐ திசைக் கொசைன்களாகக் கொண்ட நேர் கோட்டின்மீது $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டின் வீழ்ச்சியைக் காணல்.

இணைகரத்திண்மம் அமையுமாறு P, Q வழியாக ஆயத்தளங்களுக்கு இணையான தளங்கள் வரை. இதன் ஒரு மூலைவிட்டம் PQ ஆகும்.

$PA = x_2 - x_1$, $AB = y_2 - y_1$, $BQ = z_2 - z_1$. PA, AB, BQ ஆயங்களுக்கு இணையாக இருப்பதால் l, m, n-ஐ திசைக் கொசைன்களாகக் கொண்ட நேர் கோட்டின்மீது அவற்றின் வீழ்ச்சிகள் முறையே



படம்-63

$(x_2 - x_1)l$, $(y_2 - y_1)m$, $(z_2 - z_1)n$ ஆகும். ஆனால் எந் நேர் கோட்டின் மீதும் PQ-ன் வீழ்ச்சியானது, அதன் மீதுள்ள, PA, AB, BQ வீழ்ச்சிகளின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

$\therefore$ தேவையான வீழ்ச்சி $= (x_2 - x_1)l + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)n$.

துணைமுடிபு: ஆயங்களின்மீது PQ-ன் வீழ்ச்சி முறையே $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ ஆகும்.

18. $P(x_1, y_1, z_1)$ $Q(x_2, y_2, z_2)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள்.

PQ-ன் திசைக் கொசைன்கள் l, m, n ஆக இருக்கட்டும். x ஆயத்தின்மீது PQ-ன் வீழ்ச்சி $PQ \cdot l$. x ஆயத்தின் திசைக் கொசைன்கள் 1, 0, 0 என்பதால் அதன்மீது PQ-ன் வீழ்ச்சி $(x_2 - x_1)$.

$$\therefore \quad PQ \cdot l = x_2 - x_1. \qquad \therefore \quad PQ = \frac{x_2 - x_1}{l}$$

இவ்வாறே $PQ = \dfrac{y_2 - y_1}{m}$, $PQ = \dfrac{z_2 - z_1}{n}$.

$$\therefore \quad \frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{y_2 - y_1}{m} = \frac{z_2 - z_1}{n} = PQ.$$

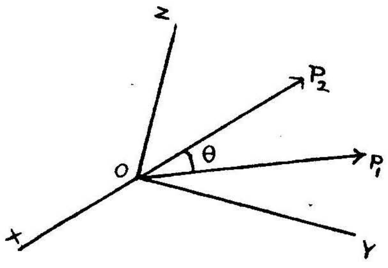
எனவே (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ என்பவற்றிற்கு விகிதப் பொருத்தத்தில் இருக்கும்.

மாதிரி: (1, 0, −2), (3, −3, 4) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்.

கொடுத்துள்ள புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் 1−3, 0+3, −2−4, என்பனவற்றிற்கு விகிதப் பொருத்தத்திலிருக்கும். (அ - து.) −2, 3, −6 என்பனவற்றிற்கு விகிதப் பொருத்தத்திலிருக்கும். அவற்றை முறையே $-2k$, $3k$, $-6k$ எனக் கொண்டால் $(-2k)^2+(3k)^2+(-6k)^2=1$ $\therefore$ $49k^2=1$ $\therefore$ $k=\pm\frac{1}{7}$. k-ன் கூட்டு மதிப்பை எடுத்துக்கொள்வோமானால் தேவையான நேர் கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}$ ஆகும்.

14. இரண்டு நேர் கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணம்.

இரண்டு கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் முறையே (l_1, m_1, n_1) (l_2, m_2, n_2) என இருக்கட்டும். அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணம் θ-வாக இருக்கட்டும்.



படம்-64

கொடுத்துள்ள கோடுகளுக்கு இணையாக O வழியாக முறையே OP_1, OP_2 கோடுகள் வரைக. அவற்றின் திசைக் கொசைன்கள் முறையே l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 ஆகும். $P_1\hat{O}P_2=\theta$.

P_2 வின் ஆயத்தொலைகள் $(x_2\ y_2, z_2)$ எனில் OP_1-ன் மீது OP_2-ன் வீழ்ச்சி $l_1x_2+m_1y_2+n_1z_2$ ஆனால் இவ்வீழ்ச்சி $OP_2 \cos\theta$ விற்குச் சமம்.

மேலும் $x_2=l^2\ OP_2,\ y_2=m_2\ OP_2,\ z_2=n_2\ OP_2$

$$OP_2 \cos\theta = l_1x_2+m_1y_2+n_1z_2$$
$$= (l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)OP_2$$
$$\therefore \cos\theta = l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$$

கிளைத்தேற்றம் 1:

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$$
$$= 1-(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2$$
$$= (\Sigma l_1^2)(\Sigma l_2^2)-(\Sigma l_1l_2)^2$$
$$= (m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2$$
$$+(l_1m_2-l_2m_1)^2.$$

(by Lagrange's identity) லக்ராஞ்சியின் முற்றொருமையின்படி.

$$\therefore \quad \sin\theta = \pm\sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2}$$
$$\tan\theta = \pm\sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2}/(\Sigma\, l_1l_2)$$

கிளைத்தேற்றம் 2: திசைக் கொசைன்களுக்குப் பதில், திசை விகிதங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் கண்டுபிடித்தல்.

இரண்டு கோடுகளின் திசை விகிதங்கள் a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2 எனில்

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$
$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(b_1c_2-b_2c_1)^2}{(\Sigma\, a_1^2)\cdot(\Sigma\, a_2^2)}}$$

15. இரண்டு நேர் கோடுகள் செங்குத்தாகவும், இணையாகவும் இருப்பதற்கான நிபந்தனைகள்.

இரண்டு நேர் கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 எனக்கொள்வோம்.

கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனில் $\theta = 90°$

$\therefore \quad \cos\theta = 0$

ஆகையால் $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

கோடுகள் இணையெனில் $\theta=0$, $\therefore \quad \sin\theta = 0$

ஆகையால் $(l_1m_2-l_2m_1)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2=0$

அதாவது $l_1m_2-l_2m_1=0$, $m_1n_2-m_2n_1=0$, $n_1l_2-n_2l_1=0$

(அ - து.) $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

துணைமுடிபு: இரண்டு நேர் கோடுகளின் திசைவிகிதங்கள் முறையே a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2 ஆனல் அவை செங்குத்தாக இருக்க $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ என்ற நிபந்தனையையும், இணையாக இருக்க $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ என்ற நிபந்தனையையும் பெறுகின்றோம்.

மாதிரி 6: l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2-வை திசைக் கொசைன்களாகக் கொண்ட இரு நேர் கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டியின் திசைவிகிதங்களைக் கண்டுபிடி.

O-வின் வழியாகக் கொடுத்துள்ள நேர் கோடுகளுக்கு இணையாக OP_1, OP_2 என்ற நேர் கோடுகள் வரை. OP_1, OP_2-வின் திசைக் கொசைன்கள் l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 ஆகும். $OP_1 = OP_2 = 1$ எனக்

கொண்டால் P_1, P_2 புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் முறையே (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) ஆகும்.

மேலும் இரு நேர்கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டியின் திசை விகிதமும், $P_1\hat{O}P_2$வின் இருசம வெட்டியின் திசை விகிதமும் சமம்.

$P_1\hat{O}P_2$-ன் இருசமவெட்டி P_1P_2வின் மையப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும்.

P_1P_2வின் மையப்புள்ளி $\left(\dfrac{l_1+l_2}{2}, \dfrac{m_1+m_2}{2}, \dfrac{n_1+n_2}{2}\right)$

எனவே $P_1\hat{O}P_2$வின் இருசம வெட்டி $\left(\dfrac{l_1+l_2}{2}, \dfrac{m_1+m_2}{2}, \dfrac{n_1+n_2}{2}\right)$ வழியாகச் செல்லும்.

∴ உள் இருசம வெட்டியின் திசை விகிதங்கள் l_1+l_2, m_1+m_2, n_1+n_2 ஆகும்.

P_2Oவின் நீட்சியின் மீது $OP_2'=-1$ என இருக்குமாறு P_2' புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டால் P_2'-ன் ஆயத்தொலைகள் $(-l_2, -m_2, -n_2)$ ஆகும்.

P_1P_2'ன் மையப்புள்ளி R எனில் $P_1\hat{O}P_2$வின் வெளி இருசமவெட்டி R வழிச் செல்லும்.

Rன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\dfrac{l_1-l_2}{2}, \dfrac{m_1-m_2}{2}, \dfrac{n_1-n_2}{2}\right)$

∴ வெளி இருசம வெட்டியின் திசை விகிதங்கள் l_1-l_2, m_1-m_2, n_1-n_2 ஆகும்.

ஆகையால் l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2வை திசைக் கொசைன்களாகக் கொண்ட கொடுத்துள்ள இருகோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணத்தின் இருசம வெட்டியின் திசை விகிதங்கள் $l_1\pm l_2$, $m_1\pm m_2$, $n_1\pm n_2$ ஆகும்.

மாதிரி 7 : l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3யை திசைக் கொசைன்களாகக் கொண்ட மூன்று ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் (concurrent lines) ஒரு தளக்கோடுகள் (coplanar lines) ஆனால்

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ எனக் காண்பி.}$$

மூன்று கோடுகளையும் கொண்ட தளத்தின் செங்கோட்டின் (Normal) திசைக் கொசைன்களை l, m, n எனக் கொள்வோம். இச் செங்கோடு மூன்று கோடுகளுக்கும் செங்குத்தாக இருப்பதால்

$$ll_1+mm_1+nn_1 = 0$$
$$ll_2+mm_2+nn_2 = 0$$
$$ll_3+mm_3+nn_3 = 0$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து l, m, nஐ நீக்க

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$ எனக் கிடைக்கும்.

மாதிரி 8 : இரண்டு நேர்கோடுகளின் திசைக் கோசைன் கீழ் கண்ட சமன்பாடுகள் மூலம் தொடர்பு படுத்தப்பட்டுள்ளது. $al+bm+cn = 0$, $ul^2+vm^2+wn^2 = 0$. $a^2(v+w)+b^2(w+u)+c^2(u+v) = 0$ எனில் அவை இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை என்றும் $\frac{a^2}{u}+\frac{b^2}{v}+\frac{c^2}{w}= 0$ எனில் கோடுகள் இணையானவை என்றும் நிரூபி.

$al+bm+cn=0$; $ul^2+vm^2+wn^2=0$ சமன்பாடுகளிலிருந்து nஐ நீக்க,

$$ul^2+vm^2+w\left(\frac{al+bm}{-c}\right)^2 = 0$$

$$\text{(அ-து.)}\quad (c^2u+a^2w)\frac{l^2}{m^2}+2abw\frac{l}{m}+b^2w+c^2v=0 \qquad (1)$$

$$\therefore\ \frac{l_1}{m_1}\cdot\frac{l_2}{m_2} = \text{தீர்வுகளின் பெருக்கல் பலன்} = \frac{b^2w+c^2v}{c^2u+a^2w}$$

$$\text{(அ-து.)}\quad \frac{l_1l_2}{b^2w+c^2v} = \frac{m_1m_2}{c^2u+a^2w} = \frac{n_1n_2}{a^2v+b^2u}$$

இரண்டு நேர்கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை யெனில் $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

$$\therefore\ b^2w+c^2v+c^2u+a^2w+a^2v+b^2u = 0$$

$$\text{(அ-து.)}\quad a^2(v+w)+b^2(w+u)+c^2(u+v) = 0$$

இரண்டு நேர்கோடுகளும் இணையானால், அவற்றின் திசைக் கோசைன்கள் சமம்.

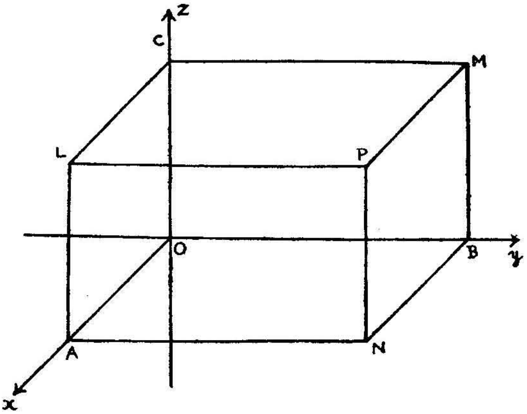
ஆகையால் சமன்பாடு (1)ன் தீர்வுகள் சமம்.

எனவே $4a^2b^2w^2-4(c^2u+a^2w)(b^2w+c^2v) = 0$

$$\text{(அ-து.)}\quad a^2c^2vw+b^2c^2wu+c^4uv = 0$$

$$\text{(அ-து.)}\quad \frac{a^2}{u}+\frac{b^2}{v}+\frac{c^2}{w} = 0$$

மாதிரி 9 : ஒரு செவ்வக இணைகரத்திண்மத்தின் ஓரங்கள் a, b, c எனில் அதன் நான்கு மூலைவிட்டங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்கள் $\cos^{-1}\left(\frac{\pm a^2 \pm b^2 \pm c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$ என நிரூபி.



படம் - 65

O, P, A, B, C, L, M, N-ன் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(0, 0, 0)$, (a, b, c), $(a, 0, 0)$ $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, $(a, 0, c)$ $(0, b, c)$, $(a, b, 0)$.

OP, AM இணைகரத்திண்மத்தின் மூலை விட்டங்கள்.

OPயின் திசை விகிதங்கள் $a-0, b-0, c-0$, (அ-து.) a, b, c.

OPயின் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{a}{\sqrt{\Sigma a^2}}, \frac{b}{\sqrt{\Sigma a^2}}, \frac{c}{\sqrt{\Sigma a^2}}$

AMன் திசை விகிதங்கள் $0-a, b-0, c-0$

AMன் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{-a}{\sqrt{\Sigma a^2}}, \frac{b}{\sqrt{\Sigma a^2}}, \frac{c}{\sqrt{\Sigma a^2}}$

OPக்கும் AMக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் θ எனில்,

$$\cos\theta = \frac{a(-a)+b \cdot b+c \cdot c}{\sqrt{\Sigma a^2} \cdot \sqrt{\Sigma a^2}} = \frac{-a^2+b^2+c^2}{\Sigma a^2}$$

இவ்வாறே மற்ற ஜோடி மூலைவிட்டங்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணங்களை அறியலாம்.

∴ பொதுவாக 6 ஜோடி மூலைவிட்டங்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் $\cos^{-1}\left\{\frac{\pm a^2 \pm b^2 \pm c^2}{\Sigma a^2}\right\}$

குறிப்பு : எல்லாக் குறிகளையும் கூட்டுக் குறிகளாகவோ அல்லது கழிவுக் குறிகளாகவோ கொள்ளக்கூடாது. அவ்வாறு கொண்டால் $\theta=\cos^{-1} 1$ அல்லது $\cos^{-1}(-1)$ என்பதால் $\theta=0$ அல்லது $\theta=180°$ என ஆகும். $\theta=0$, $\theta=180°$ எனில் மூலைவிட்டங்கள் இணையாக இருத்தல் வேண்டும். ஆனால் அவ்வாறு இருக்க முடியாது.

பயிற்சிகள் 10

1. (1, 2, 3), (3, 2, -1) புள்ளிகளுக்குச் சமதூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் இயங்கு வரை காண்க. விடை : $x-2z=0$

2. P (3, 2, -4), Q (5, 4, -6), R (9, 8, -10) என்ற புள்ளிகள் கோட்டமைப் புள்ளிகள் (collinear points) என நிரூபி. இரண்டாவது புள்ளி, மற்ற இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர் கோட்டை எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கிறது? விடை : $\frac{PQ}{QR}=\frac{1}{2}$

3. (-1, 4, 6), (-1, 1, 3), (0, 5, 6), (2, 1, 2) என்ற புள்ளிகள் (1, 3, 4) புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட கோளத்தில் அமைகின்றன என்பதை நிரூபி. கோளத்தின் ஆரையைக் (Radius) கண்டுபிடி.

4. (2, 1, -3), (3, -2, -1), (5, -8, 3) புள்ளிகள் ஒரு நேர் கோட்டிலுள்ளவை என்பதை நிரூபி.

5. (0, 7, 10), (-1, 6, 6), (-4, 9, 6) புள்ளிகள் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்குகிறது எனக் காண்பி.

6. (1, 1, 1), (-2, 4, 1), (-1, 5, 5), (2, 2, 5) புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகள் எனக் காண்பி.

7. $2x-3y+z+6=0$ என்ற தளம் (2, 4, 16), (3, 5, -4) புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டினைப் பிரிக்கும் விகிதத்தைக் காண்க. விடை : 2 : 1

8. ஆயதளங்கள் (-2, 4, 7), (3, -5, 8) புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டினைப் பிரிக்கும் விகிதங்களைக் கண்டுபிடி.
விடை : 2 : 3; 4 : 5; -7 : 8

9. இரண்டு நேர்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் $l+m+n=0$; $l^2+m^2-n^2=0$ சமன்பாடுகள் மூலம் தொடர்பு படுத்தப் பட்டுள்ளதென்றால், கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.
விடை : $\theta=60°$

10. $3lm-4ln+mn=0$, $l+2m+3n=0$ சமன்பாடுகளால் கொடுக் கப்படும் திசைக் கொசைன்களைக்கொண்ட கோடுகள் செங்குத்தானவை என நிரூபி.

11. இரு கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் $l-5m+3n=0$ $7l^2+5m^2-3n^2=0$ சமன்பாடுகளால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

விடை : $\cos^{-1}\sqrt{\frac{7}{12}}$.

12. P, Q, R, S புள்ளிகளின் ஆயங்கள் முறையே (6, −6, 0), (−1, −7, 6), (3, −4, 4), (2, −9, 2) என்றால், வீழ்ச்சிகளின் மூலம் PQ, RSக்குச் செங்குத்து என நிரூபி.

13. ஒரு கோடு கனசதுரத்தின் நான்கு மூலைவிட்டங்களுடன் α, β, γ, δ கோணங்களை ஏற்படுத்தினால் $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta=\frac{8}{3}$ என நிரூபி.

14. (5, −1, 1), (7, −4, 7), (1, −6, 10), (−1, −3, 4) புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகளாகும் எனக் காட்டுக.

15. (0, 4, 1), (2, 3, −1), (4, 5, 0), (2, 6, 2) புள்ளிகள் ஒரு சாய் சதுரத்தின் (rhombus) உச்சிகள் எனக் காண்பி.

16. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள இருகோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2. இந்த இரண்டு கோடுகளுக்கும் செங்குத்தாக உள்ள கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $m_1n_2-m_2n_1$, $n_1l_2-n_2l_1$, $l_1m_2-l_2m_1$ எனக் காண்பி.

10. தளம்

(Plane)

1. வரையறை.

ஒரு புறப் பரப்பிலுள்ள (surface) ஏதேனும் இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு முழுவதும் அதில் அமையுமாயின் அப்புறப் பரப்பைத் தளம் என்கிறோம்.

2. தளத்தின் பொதுப்படைச் சமன்பாடு.

x, y, zல் அமைந்த முதல்படி சமன்பாடு $Ax+By+Cz+D=0$ ....(1)

இங்கு A, B, C, D என்பன மாறிலிகளாகும்.

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ என்ற புள்ளிகள் இதில்

அமையுமாயின் $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ ......(2)

$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0$ ......(3)

(3)ஐ k-ஆல் பெருக்கிச் சமன்பாடு இரண்டுடன் கூட்ட

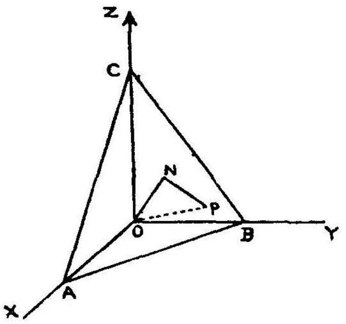
$A(x_1+kx_2)+B(y_1+ky_2)+C(z_1+kz_2)+D+kD=0$

(அ - து.) $A\frac{x_1+kx_2}{1+k}+B\frac{y_1+ky_2}{1+k}+C\frac{z_1+kz_2}{1+k}+D=0$ ......(4)

சமன்பாடு (4)லிருந்து $\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}, \frac{y_1+ky_2}{1+k}, \frac{z_1+kz_2}{1+k}\right)$ என்ற புள்ளி k-ன் எம்மதிப்புக்கும் சமன்பாடு (1)ல் அமைகின்றது.

k எம்மதிப்பும் எடுக்கக்கூடியதாகையால், PQவில் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் சமன்பாடு (1)ல் அமையும். அதாவது PQ என்றகோடு முழுவதும் (1)ல் அமைகின்றது. அதாவது சமன்பாடு (1) ஒரு தளத்தைக் குறிக்கின்றது.

3. செங்கோட்டமைப்பில் (Normal form) தளத்தின் சமன்பாடு.



படம் - 66

கொடுத்துள்ள தளத்திற்கு ON என்ற செங்கோடு வரை. அதன் நீளத்தை p என்றும்; திசைக் கொசைன்கள் l, m, n என்றும் கொள்வோம்.

$P(x, y, z)$ தளத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. PN தளத்தில் இருப்பதால் அது ONக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். ஆகையால் ON மீது OPயின் வீழ்ச்சி $ON=p$ ஆகும். ஆனால் ON மீது OPயின் வீழ்ச்சியானது $lx+my+nz$க்குச் சமம்.

$\therefore$ $lx+my+nz=p$ என்பது தளத்தின் சமன்பாடு.

4. வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் (Intercept form) தளத்தின் சமன்பாடு.

$Ax+By+Cz+D=0$ என்ற தளம் x, y, z ஆயங்களில் முறையே a, b, c என்ற வெட்டுத்துண்டுகளை உண்டு பண்ணட்டும். எனவே வெட்டுப் புள்ளிகளாகிய $(a, 0, 0)$, $(0-b-0)$, $(0, 0, c)$ தளத்தில் அமைகின்றன.

$\therefore$ $Aa+D=0,\ Bb+D=0,\ Cc+D=0$

(அ - து.) $A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b},\ C=-\frac{D}{c}$

$\therefore$ தளத்தின் சமன்பாடு $-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$ ஆகும்.

(அ - து.) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ தளத்தின் சமன்பாடாகும்.

5. தளத்தின் பொதுப்படைச் சமன்பாடு $Ax+By+Cz+D=0$. இது வெட்டுத்துண்டு வடிவத்தில் எழுதப்படுமானால் $\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1$ என்று ஆகும்.

எனவே $Ax+By+Cz+D=0$ தளம் ஆயங்களில் $-D/A$, $-D/B$, $-D/C$ வெட்டுத் துண்டுகளை ஏற்படுத்துகின்றது. மேலும் $Ax+By+Cz+D=0$ தளத்தைச் செங்கோட்டமைப்புடன் ஒப்பிட

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}=\frac{-D}{p}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{l^2+m^2+n^2}}=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

$$\therefore\ \frac{-D}{p}=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

p எப்பொழுதும் கூட்டெண்ணுகையால், D-ன் குறிக்கு மாறுபட்ட குறியை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். எனவே செங்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள்.

$$l=\mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad m=\mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$n=\mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

குறிப்பு 1: மேற்கூறியதிலிருந்து ஒரு தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் தளத்தின் சமன்பாட்டின் x, y, z கெழுக்களாகும்.

குறிப்பு 2: தளத்தின் சமன்பாட்டால் 4 மாறிலிகள் இருப்பினும் அவற்றை மூன்ருகக் கொள்ளலாம். ஏனெனில் அவற்றைச் சுன்னமில்லாத ஏதேனும் ஒரு மாறிலியால் வகுத்து, மூன்று மாறிலிகளாக ஆக்கலாம். எனவே மூன்று நிபந்தனைகள் கொடுக்கப்பட்டால் ஒரு தளத்தை நிர்ணயிக்கலாம்.

6. மூன்று புள்ளிகள் வழியே செல்லும் தளம்.

$Ax+By+Cz+D=0$ ......(1) தளம் மூன்று புள்ளிகள் (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) வழியே சென்ருல்,

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \qquad \text{.........(2)}$$

$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0 \qquad \text{.........(3)}$$

$$Ax_3+By_3+Cz_3+D=0 \qquad \text{.........(4)}$$

A, B, C, Dஐ நான்கு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் நீக்க,

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

என்பது மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடாகும்.

கிளைத்தேற்றம்: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0$ எனில் (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) (x_4, y_4, z_4) நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு தளப் புள்ளிகளாகும்.

7. இரண்டு தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணம்.

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ என்ற இரண்டு தளங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். இரண்டு தளங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவற்றிற்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணத்திற்குச் சமம். அவ்விரு தளங்களின் செங்கோடுகளின் திசை விகிதங்கள் முறையே A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 ஆகும். எனவே அவற்றின் திசைக் கொசைன்கள் முறையே

$$\pm\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\ \pm\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\ \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

$$\pm\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},\ \pm\frac{B_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},\ \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$ ஆகும்.

இரண்டு தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் θ எனில்

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

துணை முடிவு : இரண்டு தளங்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானால் $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

இரண்டு தளங்களும் ஒன்றுக்கொன்று இணையானால் $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

$Ax+By+Cz=0$ தளத்திற்கு இணையான ஏதாவது ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு $Ax+By+Cz+k=0$ ஆகும்.

மாதிரி 1 : (3, −2, 4) புள்ளி வழியாகச் செல்லக்கூடியதும் (2, 3, 5), (1, −2, 3) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக உள்ளதுமான தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்.

$A(2, 3, 5)$, $B(1, -2, 3)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் −1, −5, −2.

தேவையான தளம் ABக்குச் செங்குத்தாக இருப்பதால் அதன் சமன்பாடு $-x-5y-2z+D=0$ வடிவில் இருக்கும். இத்தளம் (3, −2, 4) வழிச் செல்வதால் $-3+10-8+D=0$ $\therefore\ D=1$

$\therefore$ தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு $x+5y+2z=1$.

மாதிரி 2 : (2, 2, −1), (3, 4, 2), (7, 0, 6) புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு காண்.

(2, 2, −1) வழிச்செல்லும் தளத்தை $A(x-2)+B(y-2)+C(z+1)=0$ என எழுதலாம். இத்தளம் (3, 4, 2), (7, 0, 6) புள்ளிகளைக் கொண்டதாயின்

$$A+2B+3C=0$$
$$5A-2B+7C=0$$

(அ - து.) $\frac{A}{14+6}=\frac{B}{15-7}=\frac{C}{-2-10}$

(அ - து.) $\frac{A}{5}=\frac{B}{2}=\frac{C}{-3}$

A, B, Cயின் இவ்விகிதப் பொருத்த மதிப்புகளை

$A(x-2)+B(y-2)+C(z+1)=0$ல் பிரதியிட

$$5(x-2)+2(y-2)-3(z+1)=0$$

(அ - து.) $5x+2y-3z-17=0$

எனவே தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு

$$5x+2y-3z-17=0.$$

குறிப்பு : (x_1, y_1, z_1) புள்ளி வழிச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டை $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ எனக் கொள்ளலாம்.

தளத்தின் சமன்பாடு

$Ax+By+Cz+D=0$......(1) என்று கொள்வோம்.

இது (x_1, y_1, z_1) வழிச் சென்றால்

$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$...(2)

(1)லிருந்து (2)ஐ கழிக்க

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ எனக் கிடைக்கும்.

மாதிரி 3 : ஒரு மாறும் தளம் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி (a, b, c) வழிச் செல்கின்றது ; ஆயங்களை A, B, Cயில் சந்திக்கின்றது. A, B, C வழி ஆயத்தளங்களுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட தளங்களின் பொதுப் புள்ளியின் இயங்குவரை $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$ என நிரூபி.

கொடுக்கப்பட்ட தளத்தின் சமன்பாடு

$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$ எனக் கொள்வோம்.

இது (a,b,c) வழிச் செல்வதால் $\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=1$ ......(1)

இது ஆயங்களை $A(\alpha, 0, 0)$, $B(0, \beta, 0)$, $C(0, 0, \gamma)$ புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது.

மேலும் A, B, C வழியாக ஆயத்தளங்களுக்கு இணையான தளங்கள் $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ என்பனவாகும்......(2)

சமன்பாடு (1) சமன்பாடு (2) ஆகியவைகளிலிருந்து α, β, γவை நீக்கத் தேவையான இயங்குவரை கிடைக்கும்.

(அ - து.) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1.$

8. $Ax+By+Cz+D=0$ தளம் (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டைக் கூறிடும் விகிதத்தைக் காணல்.

கொடுத்துள்ள புள்ளிகளை P, Q எனக் கொள்வோம். PQவை கொடுத்துள்ள தளம் $\lambda : 1$ விகிதத்தில் கூறிடட்டும்.

கூறிடும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right) \text{ ஆகும்.}$$

இப்புள்ளி தளத்தில் இருக்குமாறால்

$$A\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}\right)+B\left(\frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)+C\left(\frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right)+D=0 \text{ ஆகும்.}$$

(அ - து.) $(Ax_1+By_1+Cz_1+D)+\lambda(Ax_2+By_2+Cz_2+D)=0.$

$$\therefore \quad \lambda = -\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

குறிப்பு : இம் முடிபானது கொடுத்துள்ள இரு புள்ளிகளும் தளத்தின் ஒரே பக்கத்தில் உள்ளனவா அல்லது இருபக்கங்களிலும் உள்ளனவா என்பதைக் கண்டுபிடிக்க உதவும்.

$Ax_1+By_1+Cz_1+D$, $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ இவைகளின் மதிப்புகள் ஒரே குறியினை உடையதாயின் λ கழிவு எண்ணாகும். எனவே PQ வைக் கூறிடும் புள்ளி PQ க்கு வெளிப்புறமாக உள்ளது. அதாவது P, Q புள்ளிகள் தளத்தின் ஒரே பக்கத்தில் அமைகின்றன.

$Ax_1+By_1+Cz_1+D$, $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் மாறுபட்ட குறியினை உடையதாயின் λ கூட்டெண்ணாக இருக்கும். எனவே PQ வைக் கூறிடும் புள்ளி PQ க்கு உட்புறமாக உள்ளது. அதாவது P, Q புள்ளிகள் தளத்தின் இருபுறமும் அமைகின்றன.

மாதிரி 4 : சூழ்வெளியில் A, B, C, D என்பவை ஏதேனும் நான்கு புள்ளிகள். AB, BC, CD, DA ஐ $ax+by+cz+d=0$ முறையே P, Q, R, S-ல் வெட்டினால்

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1 \text{ என நிரூபிக்க.}$$

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ எனக் கொள்வோம்.

AB-ஐ தளம் $ax+by+cz+d=0$ P யில் வெட்டுவதால்

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{ax_2+by_2+cz_2+d}$$

இதுபோல்

$$\frac{BQ}{QC} = -\frac{ax_2+by_2+cz_2+d}{ax_3+by_3+cz_3+d}$$

$$\frac{CR}{RD} = -\frac{ax_3+by_3+cz_3+d}{ax_4+by_4+cz_4+d}$$

$$\frac{DS}{SA} = -\frac{ax_4+by_4+cz_4+d}{ax_1+by_1+cz_1+d}$$

$$\therefore \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$

9. ஒரு தளத்திலிருந்து ஒரு புள்ளியின் செங்குத்து உயரம்.

தளத்தின் சமன்பாட்டை $lx+my+nz=p$ எனக் கொள்வோம். கொடுத்துள்ள புள்ளியை $p\,(x_1, y_1, z_1)$ எனக் கொள்வோம்.

$lx+my+nz=p$......(1) க்கு இணையாக (x_1, y_1, z_1) வழிச்செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $lx+my+nz=p_1$......(2)

இங்கு $p_1=lx_1+my_1+nz_1$

மேலும் p_1, ஆதியிலிருந்து தளம் (2)-ன் செங்குத்து உயரமாகும்.

O விலிருந்து (1), (2) தளங்களுக்கு ONN_1 செங்குத்துக்கோடு வரைக. ONN_1 செங்குத்துக்கோடு (1), (2) தளங்களை முறையே N, N_1 ல் சந்திக்கட்டும்.

$$ON=p, \quad ON_1=p_1$$

ஆகையால் தளம் (1)-லிருந்து Pயின் செங்குத்து உயரம்

$$= p_1-p$$

$$= lx_1+my_1+nz_1-p$$

துணை முடிவு : தளத்தின் சமன்பாடு $Ax+By+Cz+D=0$ எனில், செங்கோட்டு வடிவத்தில் அதன் சமன்பாடு

$$\frac{A}{\sqrt{\Sigma A^2}}x+\frac{B}{\sqrt{\Sigma A^2}}y+\frac{C}{\sqrt{\Sigma A^2}}z=-\frac{D}{\sqrt{\Sigma A^2}}$$

$P(x_1, y_1, z_1)$ புள்ளியிலிருந்து தளத்தின் செங்குத்து உயரம்

$$= \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

10. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ தளங்கள் வெட்டும் பொதுக் கோட்டின் வழிச்செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ வடிவில் இருக்கும். λ ஒரு நிலையெண்.

இது x, y, z-ல் ஒருபடி சமன்பாடு. எனவே ஒரு தளத்தைக் குறிக்கும். முதலிரண்டு தளங்களின் பொதுப்புள்ளிகளின் ஆயங்கள் λ-வின் மதிப்பு என்னவானாலும் மூன்றாவது தளத்திற்கும் பொருந்தும். ஆகவே λ-ன் மதிப்பு என்னவானாலும், $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ சமன்பாடு, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ தளங்கள் வெட்டும் பொதுக்கோட்டின் வழிச் செல்லும் தளத்தைக் குறிக்கும்.

மாதிரி 5 : (1, 1, 1) புள்ளியின் வழியாகவும் $x + 2y - z + 1 = 0$, $3x - y + 4z + 3 = 0$ தளங்களின் பொதுக்கோட்டின் வழியாகவும் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்.

$$x + 2y - z + 1 + \lambda(3x - y + 4z + 3) = 0 \ldots\ldots(1)$$

λ-வின் எல்லா மதிப்புக்கும் கொடுத்துள்ள இரு தளங்களின் வெட்டுக் கோடு வழிச்செல்லும். இத்தளம் (1, 1, 1) புள்ளி வழிச்செல்லுமானால்

$$1 + 2 - 1 + 1 + \lambda(3 - 1 + 4 + 3) = 0$$

$$3 + 9\lambda = 0 \qquad \therefore \lambda = -\tfrac{1}{3}$$

இம்மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட

$$x + 2y - z + 1 - \tfrac{1}{3}(3x - y + 4z + 3) = 0$$

$$7y - 7z = 0 \quad (\text{அ - து.}) \quad y - z = 0.$$

மாதிரி 6 : $2x + y + 3z - 4 = 0$, $4x - y + 5z - 7 = 0$ தளங்கள் வெட்டும் கோட்டின் வழியாகவும் $x + 3y - 4z + 6 = 0$ தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்.

$2x + y + 3z - 4 = 0$, $4x - y + 5z - 7 = 0$ தளங்கள் வெட்டும் கோட்டின் வழிச்செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$(2x + y + 3z - 4) + \lambda(4x - y + 5z - 7) = 0 \ldots\ldots(1)$$

வடிவில் இருக்கும்.

(அ - து.) $(2 + 4\lambda)x + (1 - \lambda)y + (3 + 5\lambda)z - (4 + 7\lambda) = 0$

இத்தளம் $x+3y-4z+6=0$-க்குச் செங்குத்தாக இருக்குமானால்

$$(2+4\lambda).1+(1-\lambda).3+(3+5\lambda)(-4)=0$$

$$-7-19\lambda=0 \qquad \therefore \lambda=-\tfrac{7}{19}.$$

இம்மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட

$$19(2x+y+3z-4)-7(4x-y+5z-7)=0$$

$$10x+26y+22z-27=0$$

தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு

$$10x+26y+22z-27=0.$$

மாதிரி 7 : $2x+2y-z+1=0$, $2x+2y-z+4=0$ என்ற இணையான தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரத்தைக் காண்.

இரண்டு தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் ஒரு தளத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு தளத்திற்குள்ள செங்குத்து உயரமாகும்.

முதல் தளமானது OZ-ஐ P-யில் சந்திக்கட்டும்.

P-யின் ஆயத்தொலைகள் (0, 0, 1)

P-யிலிருந்து இரண்டாவது தளத்திற்குள்ள

$$\text{தூரம்} = \frac{-1+4}{\sqrt{9}}=1$$

இரு தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் $=1$.

பயிற்சிகள்–11

1. $2x+3y-z=0$ தளத்திற்கு இணையாகவும், (3, 4, 5) புள்ளி வழிச்செல்லக்கூடியதுமான தளத்தின் சமன்பாடு காண்.

விடை : $2x+3y-z-13=0$

2. $3x+4y-5z=0$, $3x+4y-5z+4=0$ தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்.

விடை : $\frac{4}{5\sqrt{2}}$ units

3. $x+2y+2z=5$ தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ புள்ளிகள் வழிச்செல்லக்கூடியதுமான தளத்தின் சமன்பாடு காண்.

விடை : $2x+2y-3z+3=0$

4. $2x-y+z=6$, $x+y+2z=3$ தளங்களுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

விடை : $\theta=\pi/3$

5. $5x+y+4z=0$ தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும், (3, 1, 2), (3, 4, 4) புள்ளிகள் வழிச்செல்லக்கூடியதுமான தளத்தின் சமன்பாடு $2x+2y-3z-2=0$ என நிரூபி.

6. $(-1, 3, 2)$ புள்ளி வழிச்செல்லக்கூடியதும், $x+2y+2z=5$, $3x+3y+2z=8$ தளங்களுக்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள தளத்தின் சமன்பாடு $2x-4y+3z+8=0$ எனக் காட்டுக.

7. $(2, 5, -3)$, $(-2, -3, 5)$, $(5, 3, -3)$ புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு காண்.

8. $4x+y-z=0$ தளத்திற்கு இணையாகவும், $(3, 2, -1)$ புள்ளி வழிச்செல்லக்கூடியதுமான தளம் ஆயங்களில் உண்டுபண்ணும் வெட்டுத் துண்டுகளின் நீளம் என்ன?

9. ஆதியுடன் $(2, 4, 5)$ புள்ளியைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டை இரு சமக்கூறிடும் செங்குத்தான தளத்தின் சமன்பாடு காண்.

விடை : $4x+8y+10z-45=0$

10. $2x-y-2z-4=0$ தளத்தின்மீது $(-1, 2, 0)$, $(1, -1, 2)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் வீழ்ச்சியின் நீளம் என்ன?

விடை : 4

11. $(2, 3, 4)$, $(4, 5, 6)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு $(-2, 3, 6)$, $(4, 0, -3)$, $(0, -1, 2)$ புள்ளிகளின் வழிச்செல்லும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும் என நிருபி.

12. $2x+3y-2z=5$, $x+2y-3z=8$ தளங்களுக்குச் செங்குத்தாக $(1, -1, 2)$ புள்ளி வழிச்செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $5x-4y-z=7$ என நிருபி.

13. $(2, -1, 5)$, $(0, -4, 1)$, $(2, 2, 8)$ புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் தளத்திற்கு $(1, 4, 5)$ புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் 3 என நிருபி.

14. $2x-2y+z+3=0$, $4x-4y+2z+5=0$ என்ற இரண்டு இணையான தளங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $\frac{1}{6}$ எனக் காண்பி.

15. $2x-y+3z+3=0$, $x-10y-21=0$ தளங்கள் வெட்டும் கோடும், $2x-y=0$, $7x+z-6=0$ தளங்கள் வெட்டும் கோடும் ஒரு தளக் கோடுகள் (coplanar lines) என நிருபி. இந்த இரு கோடுகளும் அமைந்த தளத்தின் சமன்பாடு காண்.

விடை : $x+3y+z-6=0$

16. $8x+10y-6z-7=0$ தளத்திற்குச் செங்குத்தாக, $2x-y=0$, $3x-y=0$ தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் கோடு வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $28x-17y+9z=0$ எனக் காட்டுக.

17. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+4z-3=0$ தளங்களின் பொதுக் கோடு வழிச் செல்லும், $2x+y+2z-4=0$ தளத்துடன் $\cos^{-1}(\frac{2}{3})$ கோணத்தை உண்டுபண்ணும் தளங்களின் சமன்பாடுகள் காண்.

விடை : $\begin{cases} 3x+4y-5=0 \\ 13x-16y+40z-35=0 \end{cases}$

18. ஒரு தளம் $x+y=1$, $z=0$ கோட்டின் வழிச் செல்கிறது. $x+y+z=0$ தளத்துடன் $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{8}}$ கோணம் ஏற்படுத்துகிறது. அப்படி இரண்டு தளங்கள் வரையலாம் என்றும், அவைகளுக்கிடையே யுள்ள கோணம் $\cos^{-1}(\frac{7}{9})$ என்றும் நிரூபி.

19. $x+2y-z-3=0$, $3x-y+2z-1=0$ தளங்கள் வெட்டும் கோடும் $2x-2y+3z-2=0$, $x-y+z+1=0$ தளங்கள் வெட்டும் கோடும் ஒருதளக் கோடுகள் என நிரூபி. இந்த இருகோடுகளும் அமையும் தளத்தின் சமன்பாடு $7x-7y+8z+3=0$ எனக் காட்டுக.

20. ஆதியிலிருந்து $3p$ தொலைவிலுள்ள ஒரு மாறும் தளம் ஆயங்களை A, B, C புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. முக்கோணம் ABCயின் திணிவு மையத்தின் (centroid) இயங்குவரை $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{p^2}$ எனக் காட்டுக.

11A. நேர்கோடு

(The Straight line)

1. நேர்கோட்டின் சமன்பாடு: x, y, zன் ஒருபடிச் சமன்பாடு ஒரு தளத்தைக் கொடுக்கும். இரு ஒருபடிச் சமன்பாடுகளால் கொடுக்கப் படும் இரு தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்கோட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளும் இவ்விரு ஒருபடிச் சமன்பாடுகளையும் சமன் செய்யுமாதலால், இவ்விரு சமன்பாடுகளும் சேர்ந்து அந்த நேர்கோட்டின் சமன்பாடாகும். ஆகவே $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$ இரண்டும் சேர்ந்து ஒரு நேர்கோட்டைக் கொடுக்கும்.

(உ - ம்.) xz, xy தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் x அச்சின் சமன் பாடு $y=0$, $z=0$ ஆகும்.

இதுபோன்று y-அச்சின் சமன்பாடு $z=0$, $x=0$

z-அச்சின் சமன்பாடு $x=0$, $y=0$

2. ஒரு நேர்கோட்டின் சமச்சீர் அமைப்பு (Symmetrical form) சமன்பாடு.

$A(x_1, y_1, z_1)$ புள்ளியின் வழியே செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் l, m, n எனக் கொள்வோம். $P(x, y, z)$ இந்த நேர்கோட்டில் Aயிலிருந்து r தொலைவில் இருக்கும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்வோம். ஆயத்தொலை அச்சுகளில் APயின் வீழ்ச்சிகளைக் (projections) காண,

$$x-x_1 = lr, \quad y-y_1 = mr, \quad z-z_1 = nr$$

ஆகவே நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகள் $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}=r$.

துணை முடிவு 1: இந்த நேர் கோட்டின் எந்தப் புள்ளி $P(x, y, z)$யின் ஆயத் தொலைகளையும் ஒரேயொரு துணையலகு rஇன் மூலம் கொடுக்கலாம்.

$$x = x_1 + lr, \quad y = y_1 + mr, \quad z = z_1 + nr.$$

l, m, n நேர்கோட்டின் திசைக் கொசைன்களல்லாமல் திசை விகிதங்களாயிருப்பினும் $(x_1 + lr,\ y_1 + mr,\ z_1 + nr)$ அந்த நேர் கோட்டில் ஒரு புள்ளியாகும். ஆனால் இங்கு r என்பது (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு அல்ல.

துணை முடிவு 2: $\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}$ சமன்பாடுகள் (x_1, y_1, z_1) வழிச் செல்லும் l, m, n திசை விகிதங்களுடைய ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

3. $P(x_1, y_1, z_1)$ $Q(x_2, y_2, z_2)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகள்.

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ ஆகும். ஆகவே நேர் கோட்டின் சமன்பாடுகள் $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

4. $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ என்ற ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகளை சமச்சீர் அமைப்பில் கொடுத்தல்.

நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகளைச் சமச்சீர் அமைப்பில் மாற்றி யமைக்கத் தேவையாவன:

(1) அந்த நேர்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்.

(2) அந்த நேர்கோட்டிலுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு தளங்களின் செங்கோட்டு வரைகளின் (normal) திசை விகிதங்கள் முறையே A, B, C; A', B', C' ஆகும். நேர்கோட்டின் திசை விகிதங்களை l, m, n எனக் கொள்வோம். நேர் கோடு இரு தளங்களிலும் அமைவதால், இவ்விரண்டு தளங்களின் செங் கோடுகளுக்கும், நேர்கோடு செங்குத்தாகும்.

ஆகவே
$$Al + Bm + Cn = 0$$
$$A'l + B'm + C'n = 0$$

$$\frac{l}{BC' - B'C} = \frac{m}{CA' - C'A} = \frac{n}{AB' - A'B} \cdots\cdots(1)$$

xy தளத்தை அதாவது $z=0$-ஐ இந்த நேர்கோடு சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left.\begin{array}{r} Ax+By+D=0 \\ A'x+B'y+D'=0 \end{array}\right\}; \; z=0$$ சமன்பாடுகள் மூலம் கிடைக்கிறது.

$$\therefore \quad \frac{x}{BD'-B'D}=\frac{y}{DA'-D'A}=\frac{1}{AB'-A'B}$$

∴ நேர்கோடு xy தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $\left[\frac{BD'-B'D}{AB'-A'B}, \frac{DA'-D'A}{AB'-A'B}, 0\right]$ ஆகும். ......(2)

∴ (1), (2)லிருந்து சமச்சீர் அமைப்பில் $Ax+By+Cz+D=0=A'x+B'y+C'z+D'$ என்ற ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகள் :

$$\frac{x-\dfrac{BD'-B'D}{AB'-A'B}}{BC'-B'C}=\frac{y-\dfrac{DA'-D'A}{AB'-A'B}}{CA'-C'A}=\frac{z-0}{AB'-A'B}$$

மாதிரி 1 : $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{4}$ என்ற நேர்கோடு $2x+4y-z+1=0$ தளத்தை எந்த புள்ளியில் சந்திக்கும் ?

நேர்கோட்டிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(2r+1, -3r+2, 4r-3)$.

இந்த புள்ளி $2x+4y-z+1=0$ தளத்திலிருந்தால்

$$2(2r+1)+4(-3r+2)-(4r-3)+1=0$$

(அ - து.) $-12r+14=0$

$$r=\tfrac{7}{6}$$

கோடு தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\tfrac{10}{3}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{3}\right)$$

மாதிரி 2 : $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$ நேர்கோடு $x+y+z=2$ தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளிக்கும் (3, 4, 5) புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவைக் காண்.

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}=r$$ எனக் கொள்.

நேர்கோட்டிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$A\ (3+r,\ 4+2r,\ 5+2r)$$

இந்த புள்ளி $x+y+z=2$ தளத்திலிருந்தால்

$$(3+r)+(4+2r)+(5+2r)=2$$

$$5r=-10\ ;\quad r=-2$$

நேர்கோடு தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளி A (1, 0, 1)

A (1, 0, 1) புள்ளிக்கும் (3, 4, 5) புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட தூரம்

$$=\ \sqrt{(3-1)^2+(4-0)^2+(5-1)^2}$$

$$=\ \sqrt{4+16+16}\quad = \sqrt{36}\quad = \mathbf{6\ uints}$$

மாதிரி 8 : $4x+4y-5z=12,\quad 8x+12y-13z=32$ என்ற தளங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{4}$$ எனக் காட்டுக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு தளங்களின் செங்கோடுகளின் திசை விகிதங்கள் முறையே 4, 4, −5 ; 8, 12, −13 ; நேர்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $l,\ m,\ n$; எனக் கொள்வோம். இரண்டு தளங்களின் செங் கோடுகளுக்கும் நேர்கோடு செங்குத்தாகும். ஆகவே

$$4l+4m-5n=0$$

$$8l+12m-13n=0$$

$$\therefore\quad \frac{l}{-52+60}=\frac{m}{-40+52}=\frac{n}{48-32}$$

(அ - து.) $$\frac{l}{2}=\frac{m}{3}=\frac{n}{4}$$

xy தளத்தை இந்த நேர்கோடு சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண,

$$z=0$$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}4x+\ 4y&=12\\ 8x+12y&=32\end{aligned}\right\}$$ சமன்பாடுகளை விடுவிக்க $x=1,\ y=2$

∴ நேர்கோடு xy தளத்தை, அதாவது $z=0$-ஐச் சந்திக்கும் புள்ளி

$$A\ (1,\ 2,\ 0)$$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{4}$$

மாதிரி 4 : நேர்கோடுகள் $\frac{x-6}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+4}{-1}$; $x+5y-2z=6$; $6x-4y+5z=2$ ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கிறது என நிரூபி. நேர்கோடுகள் அமைந்த தளத்தைக் கண்டுபிடி.

$\frac{x-6}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+4}{-1}$ நேர்கோட்டிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $[2k+6,\ k+2,\ -k-4]$

இப்புள்ளி $x+5y-2z=6$ தளத்திலிருப்பின்

$$2k+6+5(k+2)-2(-k-4)=6$$
$$k=-2.$$

நேர்கோடும், $x+5y-2z=6$ தளமும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி $Q\ (2,\ 0,\ -2)$, $6x-4y+5z=2$ மீதும் இருப்பதால் இருகோடுகளும் $(2,\ 0,\ -2)$-ல் சந்திக்கின்றன.

$x+5y-2z=6$; $6x-4y+5z=2$ தளங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் நேர்கோடு xy தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண

$$\left.\begin{array}{l} x+5y=6 \\ 6x-4y=2 \end{array}\right\} \text{ சமன்பாடுகளை விடுவிக்க } x=1=y$$

$R\ (1,\ 1,\ 0)$ இரண்டாவது கோட்டிலுள்ள மற்றொரு புள்ளி நேர் கோடுகள் அமைந்த தளம் $P\ (6,\ 2,\ -4)$, $Q\ (2,\ 0,\ -2)$, $R\ (1,\ 1,\ 0)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும்.

$P\ (6,\ 2,\ -4)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$a(x-6)+b(y-2)+c(z+4)=0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

$Q\ (2,\ 0,\ -2)$, $R\ (1,\ 1,\ 0)$ புள்ளிகள் அத்தளத்திலிருப்பதால்

$$-4a-2b+2c=0 \qquad \ldots\ldots(2)$$
$$-5a-\ b+4c=0 \qquad \ldots\ldots(3)$$

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து a, b, c-ஐ நீக்க

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-2 & z+4 \\ -4 & -4 & 2 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(அ - து.) $x-y+z=0$.

கோடுகளால் அமைந்த தளத்தைக் காண இரண்டாவது முறை :

$x+5y-2z=6$; $6x-4y+5z=2$ நேர்கோட்டின் வழிச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$x+5y-2z-6+k\ (6x-4y+5z-2)=0$$

இத்தளத்தில் முதல் நேர்கோடும் அமைவதால் (6, 2, −4) புள்ளி தளத்திலிருக்கவேண்டும்.

(அ - து.) $6+10+8-6+k(36-8-20-2)=0$

$18+6k=0\,; \quad \therefore\ k=-3.$

$\therefore$ தளத்தின் சமன்பாடு

$x+5y-2z-6-3(6x-4y+5z-2)=0$

(அ - து.) $-17x+17y-17z+0$

$x-y+z=0$

இத்தளம் $x-y+z=0$, $(6+2k,\ \ k+2,\ \ -k-4)$ என்னும் முதல் கோட்டின் மீதுள்ள எப்புள்ளி வழியேயும் செல்வதால் கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகளைக் கொண்ட தளத்தின் சமன்பாடு $x-y+z=0$

11B. தளமும் நேர்கோடும்

(The plane and the Straight line)

5. $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ நேர்கோடு $ax+by+cz+d=0$ தளத்திற்கு இணையாக இருத்தற்குரிய நிபந்தனை.

இந்த நேர்கோட்டில் (x_1, y_1, z_1) புள்ளியிலிருந்து r தொலைவி லுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1+lr, y_1+mr, z_1+nr).

இப்புள்ளி தளத்தில் அமைய

$$a(x_1+lr)+b(y_1+mr)+c(z_1+nr)+d=0$$

அதாவது $(ax_1+by_1+cz_1+d)+r(al+bm+cn)=0$

அதாவது $r=-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{al+bm+cn}$

நேர்கோடு தளத்திற்கு இணையாக அமைய வேண்டுமாயின் $r=\infty$.

$$\therefore\ al+bm+cn=0$$

மேலும் $ax_1+by_1+czd\neq 0$.

துணைமுடிவு 1: $ax_1+by_1+cz_1+d=0$ என்றால் (x_1, y_1, z_1) தளத்தில் அமைகிறது. ஆகவே நேர்கோடு தளத்தில் அமைய வேண்டி யதற்குரிய நிபந்தனைகள்

$$al+bm+cn=0$$

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0$$

துணைமுடிவு 2: $al+bm+cn=0$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்ட $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ சமன்பாடு $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ என்ற நேர்கோட்டின் வழிச் செல்லும் ஒரு தளத்தைக் குறிக்கும்.

6. $ax+by+cz+d=0$ தளத்திற்கும், $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ நேர்கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம்.

இக்கோணம் θ என்றால், நேர்கோட்டிற்கும் தளத்தின் செங்கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $90-\theta$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் a, b, c.

$$\therefore \cos(90-\theta) = \frac{al+bm+cn}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = \sin\theta.$$

துணை முடிவு: நேர்கோடு தளத்திற்கு இணையென்றால் $\theta=0$, $\therefore \sin\theta=0$, $\therefore al+bm+cn=0$.

ஒருதளக் கோடுகள் (Coplanar lines)

7. இரு நேர்கோடுகள் ஒரேதளத்தமைய வேண்டிய நிபந்தனையும் அத்தளத்தின் சமன்பாடும்.

இரு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{x-x_2}{l_1}=\frac{y-y_2}{m_1}=\frac{z-z_2}{n_1} \qquad \ldots\ldots(2)$$

எனக்கொள்வோம்.

நேர்கோடு (1)ன் வழிச்செல்லும் ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1) = 0 \qquad \ldots\ldots(3)$$

இங்கு $Al+Bm+Cn = 0 \qquad \ldots\ldots(4)$

என்ற நிபந்தனைக்கு (3)ல் வரும் A, B, C உட்பட்டதாகும். இத்தளம் (3) நேர்கோடு (2)ன் வழியாகவும் செல்லவேண்டுமாயின்

$$Al_1+Bm_1+Cn_1 = 0 \qquad \ldots\ldots(5)$$

மற்றும் $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1) = 0 \qquad \ldots\ldots(6)$

(6), (4), (5) சமன்பாடுகளிலிருந்து A, B, Cகளை நீக்க

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

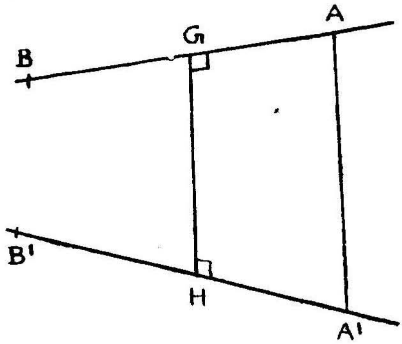
இது (1), (2) நேர்கோடுகள் ஒரு தளத்தமைய வேண்டிய நிபந்தனையாகும்.

மேலும் (3), (4), (5) சமன்பாடுகளிலிருந்து A, B, Cகளை நீக்க

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

இது (1), (2) நேர்கோடுகள் ஒருதளத்தமையும் தளத்தின் சமன்பாடாகும்.

8. இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள மிகக்குறுகிய தொலைவு.



படம் - 67

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்ற AB, $A'B'$ எனும் இரு நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மிகக் குறுகிய தொலைவு GHன் திசைக்கொசைன்கள் l, m, n எனக்கொள் வோம். GH இவ்விரு நேர்கோடுகளுக்கும் செங்குத்தாகும்.

$$\therefore \quad ll_1+mm_1+nn_1 = 0$$

$$ll_2+mm_2+nn_2 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{l}{m_1n_2-m_2n_1} = \frac{m}{n_1l_2-n_2l_1} = \frac{n}{l_1m_2-l_2m_1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2}}$$

$A(x_1, y_1, z_1)$, $A'(x_2, y_2, z_2)$ எனக்கொள்வோம்.

$$GH = GH\text{ல் } AA'\text{ன் வீழ்ச்சி}$$

$$= (x_2-x_1)l+(y_2-y_1)m+(z_2-z_1)n$$

$$= \frac{(x_2-x_1)(m_1n_2-m_2n_1)+(y_2-y_1)(n_1l_2-n_2l_1)+(z_2-z_1)(l_1m_2-l_2m_1)}{\sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2}}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2}$$

இந்த மிகக் குறுகிய தொலேவு GH, AB, GH களைக் கொண்ட தளமும் $A'B'$, GH களைக் கொண்ட தளமும் வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்கோட்டில் அமைகிறது. ஆகவே GHன் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

துணை முடிவு :

நேர்கோடுகள் $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ ஒருதளத்தமையுமாயின் அவைகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ள வேண்டும் அல்லது இணையாக இருக்கவேண்டும். இரு நேர்கோடு களும் வெட்டிக்கொண்டால் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள மிகக் குறுகிய தொலேவு சுன்னமாகும். இரு நேர்கோடுகளும் இணையாக இருப்பின் அவற்றின் திசை விகிதங்கள் விகிதசமத்தில் இருக்கும். இவ்விரு நிலேகளிலும்

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

மாதிரி 1 :

நேர்கோடுகள் $\frac{x-3}{7}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-5}{9}$, $\frac{x-2}{8}=\frac{y-3}{9}=\frac{z-4}{\cdot 10}$, ஒரு தளக் கோடுகள் எனக்காண்பி.

முதல் நேர்கோட்டின் வழியாகவும் இரண்டாவது நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவும் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

(அ - து.) $(x-3)(-1)-(y-4)(-2)+(z-5)(-1) = 0$

(அ - து.) $x-2y+z = 0$

இத்தளம் (2, 3, 4) புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்கோடுகளும் ஒருதளத்தமையும் நேர்கோடுகள். அத்தளத்தின் சமன்பாடு $x-2y+z = 0$.

மாதிரி 2 : $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{1}$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z+2}{2}$

நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள மிகக் குறுகிய தொலைவையும், அத் தொலைவின் சமன்பாடுகளையும் கண்டுபிடி.

மிகக் குறுகிய தொலைவின் திசைக் கொசைன்கள் l, m, n எனக் கொள்வோம்.

மிகக் குறுகிய தொலைவு கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக இருப்பதால்

$$-l+2m+n = 0$$

$$l+3m+2n = 0$$

$$\frac{l}{1} = \frac{m}{3} = \frac{n}{-5} = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2+(-5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{35}}$$

மிகக் குறுகிய தொலைவு = மிகக் குறுகிய தொலைவின்மீது (3, 4, −2), (1, −7, −2) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் வீழ்ச்சி.

$$= \frac{1}{\sqrt{35}}\cdot 2+\frac{3}{\sqrt{35}}\cdot 11-\frac{5}{\sqrt{35}}\cdot 0$$

$$= \sqrt{35}.$$

முதல் நேர்கோடும் மிகக் குறுகிய தொலைவும் அமைந்த தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

(அ - து.) $13x+4y+5z-45 = 0$

இரண்டாவது நேர்கோடும் மிகக்குறுகிய தொலைவும் அமைந்த தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+7 & z+2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

(அ - து.) $3x-y-10 = 0$

மிகக்குறுகிய தொலைவின் சமன்பாடுகள்

$$13x+4y-5z-45=0 = 3x-y-10.$$

மாதிரி 3 : பிறிதொரு முறை :

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+2}{1}=r_1 \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+7}{3}=\frac{z+2}{2}=r_2 \qquad \ldots\ldots(2)$$

கோடு (1)-ல் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி P-யின் ஆயத்தொலைகள் $(-r_1+3,\ 2r_1+4,\ r_1-2)$

கோடு (2)-ல் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி Q-யின் ஆயத்தொலைகள் $(r_2+1,\ 3r_2-7,\ 2r_2-2)$

PQ-ன் திசை விகிதங்கள் (Direction ratios)

$$-r_1-r_2+2,\quad 2r_1-3r_2+11,\quad r_1-2r_2$$

PQ மிகக் குறுகிய தொலைவானால், PQ கோடுகள் (1), (2)-க்குச் செங்குத்தாதல் வேண்டும். எனவே

$$-1(-r_1-r_2+2)+2(2r_1-3r_2+11)+1(r_1-2r_2)=0$$

$$1(-r_1-r_2+2)+3(2r_1-3r_2+11)+2(r_1-2r_2)=0$$

அதாவது $6r_1-7r_2+20=0$

$$r_1-2r_2+5=0$$

இச்சமன்பாடுகளை விடுவிக்க, $r_1=-1$

$$r_2=2$$

$\therefore$ P-ன் ஆயத்தொலைகள் $(4,\ 2,\ -3)$

Q-ன் ஆயத்தொலைகள் $(3,\ -1,\ 2)$

மிகக் குறுகிய தொலைவு $PQ=\sqrt{(4-3)^2+(2+1)^2+(-3-2)^2}$

$$=\sqrt{35}$$

மிகக் குறுகிய தொலைவு PQ-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{-5}.$$

பயிற்சிகள்-12

1. $(2, 1, 3)$, $(6, -5, 7)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு $2x+y-z=3$ தளத்தை எந்தப் புள்ளியில் சந்திக்கும்?

விடை : $(0, 4, 1)$

2. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-12}{5}=\frac{z-7}{2}$ நேர்கோடு $11x^2-5y^2+z^2=0$ பரப்பை (surface) எந்தப் புள்ளிகளில் வெட்டும்?

விடை : $(1, 2, 3)$, $(2, -3, -1)$

3. (1, −2, 3) புள்ளியிலிருந்து $x-y+z=5$ தளத்திற்குள்ள தொலைவை, $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-6}$ நேர்கோட்டிற்கு இணையாக அளந்து காண்க.

விடை : 1

4. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$ நேர்கோடு $x+y+z=2$ தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளிக்கும் (3, 4, 5) புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க.

விடை : 6

5. α, β, γ புள்ளியிலிருந்து $ax+by+cz+d=0$ தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து (α, β, γ) புள்ளியிலிருந்து தளம் $ax+by+cz+d=0$க்குச் செங்குத்துயரத்தைக் காண்க.

6. (2, −3, 1) புள்ளியிலிருந்து $2x-y+2z+3=0$ தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் அடிப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

விடை : $\left(\frac{-2}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-5}{3}\right)$

7. $\frac{x}{l_1}=\frac{y}{m_1}=\frac{z}{n_1}$; $\frac{x}{l_2}=\frac{y}{m_2}=\frac{z}{n_2}$ நேர்கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக (α, β, γ) வழியே வரையப்படும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x-\alpha}{m_1n_2-m_2n_1}=\frac{y-\beta}{n_1l_2-n_2l_1}=\frac{z-\gamma}{l_1m_2-l_2m_1}$ எனக் காட்டுக.

8. $x+2y+3z=4$ தளத்தின்மீது $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$ நேர்கோட்டின் வீழ்ச்சியை (Projection)க் காண்க.

விடை : $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ x+2y+3z=4 \end{array}\right\}$

9. $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$ நேர்கோடு $ax+by+cz+d=0$ தளத்தில் அமைவதற்குரிய நிபந்தனை என்ன ?

விடை : $\left.\begin{array}{r} a\alpha+b\beta+c\gamma+d=0 \\ al+bm+cn=0 \end{array}\right\}$

10. $x=az+b$, $y=cz+d$; $x=a'z+b'$, $y=c'z+d'$ என்ற இரு நேர்கோடுகள் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டிய நிபந்தனை $aa'+cc'+1=0$ எனக் காட்டுக.

11. $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ நேர்கோட்டின் வழியாகவும், $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{l}$; $\frac{x}{n}=\frac{y}{l}=\frac{z}{m}$ நேர்கோடுகளைக் கொண்ட தளத்திற்குச் செங்குத்தாக வும் அமையும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$x(m-n)+y(n-l)+z(l-m)=0$$ எனக் காட்டுக.

12. $2x+3y-4z=0=3x-4y+z$

$$5x-y-3z+12=0=x-7y+5z-6$$

என்ற இரு நேர்கோடுகளும் இணை எனக் காட்டுக.

13 $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{4}$ நேர்கோடு $4x+4y-5z=0$ தளத் திற்கு இணை எனக் காட்டுக.

14. $2x-3y-7z=0$, $3x-14y-13z=0$, $8x-31y-33z=0$ என்ற மூன்று தளங்களும் ஒரு நேர்கோட்டின் வழிச் செல்லுகின்றன எனக் காண்பி.

15. $(3, 4, -1)$, $(2, -1, 5)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டிற் குச் செங்குத்தாக $(2, -3, 1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் தளத்தின் சமன் பாட்டினைக் காண்க. விடை: $x+5y-6z+19=0$

16. $4x+4y-5z=12$, $8x+12y-13z=32$ என்ற தளங்கள் வெட் டிக்கொள்ளும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{4}$ எனக் காட்டுக.

17. $x-2y+z=0=x+y-z$, $x+2y+z=0=8x+12y+5z$ நேர் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

விடை: $\cos^{-1}\left(\frac{8}{406}\right)$

18. $(1, 2, 3)$ புள்ளியிலிருந்து $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$ நேர்கோட் டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் என்ன?

விடை: $\sqrt{\frac{3}{5}}$

19. $x+2y-z=3$, $3x-y+2z=1$;

$$2x-2y+3z=2, \quad x-y+z+1=0;$$

நேர்கோடுகள் ஒருதளக் கோடுகள் என நிரூபி. நேர்கோடுகள் அமை யும் தளத்தின் சமன்பாடு காண். விடை: $7x-7y+8z+3=0$

20. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-3}{1}$; $\frac{x+3}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-6}{4}$ நேர்கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள மிகக் குறுகிய தொலைவு (Shortest distance) என்ன?

விடை : $3\sqrt{30}$

21. ஆதியிலிருந்து $x+2y+3z+4=0=2x+3y+4z+5$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. மேலும் செவ்வடியின் (foot of the perpendicular) ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.

விடை : $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-4}$; $\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-4}{3}\right)$

22. $3x-9y+5z=0=x+y-z$;

$6x+8y+3z-13=0=x+2y+z-3$; நேர் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள மிகக்குறுகிய தொலைவையும், அதன் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

விடை : $\frac{11}{\sqrt{342}}$; $10x-29y+16z=0=13x+82z+55y-109$

23. $ax+by+cz+d=0=a'x+b'y+c'z+d'$ நேர் கோட்டைக் கொண்டதும், z-அச்சுக்கு இணையானதுமான தளத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. இதிலிருந்து நேர் கோட்டிற்கும் z-அச்சுக்கும் இடையேயுள்ள மிகக் குறுகிய தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

விடை : $\frac{cd'-c'd}{\sqrt{(ca'-c'a)^2+(bc'-b'c)^2}}$.

24. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+2}{1}$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y+7}{3}=\frac{z+2}{2}$ நேர் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள மிகக் குறுகிய தொலைவையும் அதன் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

விடை : $\sqrt{35}$, $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{-5}$.

25. $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$; $\frac{x}{a\alpha}=\frac{y}{b\beta}=\frac{z}{c\gamma}$; $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ நேர் கோடுகள் ஒரு தளக்கோடுகளாயின் $\frac{l(b-c)}{\alpha}+\frac{m(c-a)}{\beta}+\frac{n(a-b)}{\gamma}=0$ எனக் காண்பி.

26. $y+z=0$, $z+x=0$, $x+y=0$, $x+y+z=a$ என்னும் தளங்கள் நான்முகத்தின்மம் $ABCD$-ஐ உருவாக்கினால் AB, CD; AC, BD; AD, BC என்னும் ஒவ்வொரு ஜதைக் கோடுகளுக்கும் இடையிலுள்ள குறைந்த தொலைவு $\frac{2a}{\sqrt{6}}$ என்று நிரூபிக்க.

12. கோளம்

(The Sphere)

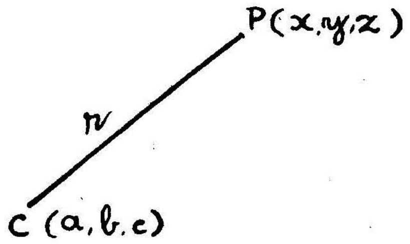
1. வரையறை : ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து, சூழ்வெளியில் நகரும் ஒரு புள்ளியின் தூரம் மாறிலியாக இருப்பின், அப்புள்ளியின் நியமபாதையைக் கோளம் எனக் கூறுகிறோம். நிலையான புள்ளிக்குக் கோளத்தின் மையம் என்றும், மாறு தூரத்திற்குக் கோளத்தின் ஆரம் என்றும் பெயர்.

2. ஒரு கோளத்தின் மையமும், ஆரமும் கொடுக்கப்படின் அக்கோளத்தின் சமன்பாடு காணுதல்.

கோளத்தின் மையத்தை $C(a, b, c)$ எனவும், ஆரத்தை r எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம். $P(x, y, z)$ கோளத்தின்மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாக இருக்கட்டும்.

எனவே $CP^2=r^2$. அதாவது $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$...(1)

(அ - து.) $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-r^2)=0$



படம்-68

(அ - து.) $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ ...... (2)

என்ற அமைப்பில் சமன்பாடு (1)ஐ மாற்றி எழுதலாம். இங்கு $u=-a$, $v=-b$, $w=-c$, $d=a^2+b^2+c^2-r^2$. எனவே சமன்பாடு (2) கோளத்தின் திட்ட வடிவ சமன்பாடாகும்.

துணை முடிபு: கோளத்தின் மையம் ஆதியாகவும், ஆரம் a-எனவும் இருப்பின், அக்கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2=a^2$ என்பதாகும்.

3. $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ சமன்பாடு ஒரு கோளத்தைத்தான் குறிக்கும் என நிரூபித்தல்.

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$

(அ - து.) $(x^2+2ux+u^2)+(y^2+2vy+v^2)+(z^2+2wz+w^2) = (u^2+v^2+w^2-d)$

(அ - து.) $(x+u)^2+(y+v^2)+(z+w^2)=(\sqrt{u^2+v^2+w^2-d})^2$

எனவே இச்சமன்பாடு $(-u, -v, -w)$ என்ற நிலையான புள்ளியிலிருந்து $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ என்ற மாறு தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் நியமபாதையைக் குறிக்கிறது. இவ்வாறு அமையும் நியமபாதை ஒரு கோளம் என நாம் அறிவோம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $(-u, -v, -w)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும், $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ என்ற தூரத்தை ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு கோளத்தைக் குறிக்கின்றது.

குறிப்பு: (i) $u^2+v^2+w^2-d$ என்பது ஒரு மிகை எண்ணுயின், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஒரு உண்மையான கோளத்தைக் குறிக்கும். $u^2+v^2+w^2-d=0$ எனில் அச்சமன்பாடு ஒரு புள்ளி—கோளத்தைக் குறிக்கும். அதாவது கோளத்தின் மையம் $(-u, -v, -w)$ எனவும் ஆரம் சுன்னமாகவும் அமைகிறது. அதாவது கோளம் $(-u, -v, -w)$ என்ற புள்ளியாக ஒடுங்குகிறது.

$u^2+v^2+w^2-d$ என்பது குறை எண்ணுக இருப்பின் நியமபாதை ஒரு கற்பனைக் கோளமாகும்.

(ii) $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ என்ற கோளத்தின் பொதுச் சமன்பாட்டில் u, v, w, d என்ற நான்கு சாரா மாறிலிகள் இருப்பதால், ஒரு கோளத்தின் சமன்பாடு காண, நான்கு வடிவ கணிதத்திற்குரிய நிபந்தனைகள் கொடுக்கப்படவேண்டும்.

(iii) மேலும் அந்தச் சமன்பாடு (a) x, y, z என்ற மாறிகளில் 2 படியுடையதாகவும் (b) x^2, y^2, z^2-ன் குணகங்கள் சமமுடைய

தாகவும் (c) xy, yz, zx என்ற உறுப்புகள் இல்லாததாகவும் அமைந்துள்ளது. எனவே கோளத்தின் பொதுச்சமன்பாட்டை $ax^2+ay^2+az^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ என்ற வடிவத்திலும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். இச்சமன்பாட்டை

$x^2+y^2+z^2+\frac{2u}{a}x+\frac{2v}{a}y+\frac{2v}{a}z+\frac{d}{a}=0$ என மாற்றி அமைப்பின்

$\left(-\frac{u}{a}, -\frac{v}{a}, -\frac{w}{a}\right)$ கோளத்தின் மையம் எனவும்

$\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2+\left(\frac{v}{a}\right)^2+\left(\frac{w}{a}\right)^2-\frac{d}{a}}$ ஆரமெனவும் அறியலாம்.

4. கோளத்தின் விட்ட நுனிகளின் ஆயத்தொலைகள் கொடுக்கப்படின் அதன் சமன்பாடு காணுதல்.

ஒரு கோள விட்டத்தின் இறுதிப் புள்ளிகளை $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$ என எடுத்துக்கொள்வோம். கோளத்தின்மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை $P(x, y, z)$ எனக் கொள்வோம். எனவே PA, PB ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும். PA, PB-ன் திசைவிகிதங்கள் முறையே $[x-x_1, y-y_1, z-z_1]$, $[x-x_2, y-y_2, z-z_2]$ என்பனவாகும். PA, PB செங்குத்துக் கோடுகளாக இருப்பதால்

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0.$$

இதுவே கோளத்தின் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு: கணக்குகள் போடக் கீழ்க்காணும் முறையையும் பின்பற்றலாம்.

C என்பது கோளத்தின் மையமெனில், அது ABயின் நடுப் புள்ளியாகும்.

எனவே $C\left[\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right]$

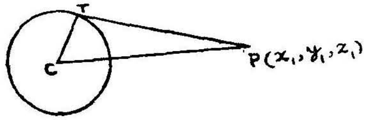
மேலும் r கோளத்தின் ஆரமாயின்

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

மையமும் ஆரமும் தெரிவதால், சமன்பாட்டை உடன் எழுதலாம்.

5. $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ கோளத்திற்கு (x_1, y_1, z_1) புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காணுதல்.

கோளத்தின் மையத்தை C எனவும் ஆரத்தை r எனவும் எடுத்துக் கொண்டால் $C(-u, -v, -w)$ என்றும் $r=\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ என்றும் அறியலாம். மேலும் (x_1, y_1, z_1) புள்ளியை P எனக் கொள்வோம்.



படம் - 69

P-யிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடு கோளத்தை T-ல் தொட்டால் PT, CT-க்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். எனவே செங்கோண முக்கோணம் PTC-லிருந்து,

$$PT^2 = PC^2-CT^2$$
$$= (x_1+u)^2+(y_1+v)^2+(z_1+w)^2-r^2$$
$$= (x_1+u)^2+(y_1+v)^2+(z_1+w)^2-(u^2+v^2+w^2-d)$$

(அ-து.) $PT^2 = x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d$

எனவே $PT = \sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d}$

துணைமுடிபு : (i) $x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d$ என்ற கோவை சுன்னத்தைவிடப் பெரிதாகவோ, சிறிதாகவோ, அல்லது சுன்னமாகவோ இருப்பின், $P(x_1, y_1, z_1)$ புள்ளி முறையே கோளத்திற்கு வெளியிலோ, உள்ளிலோ, அல்லது கோளத்தின் மீதோ அமைந்திருக்கும்.

(ii) ஆதியிலிருந்து கோளத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் நீளம் $OT^2=d$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கும்.

எனவே

$d>0$ எனில் ஆதி கோளத்திற்கு வெளியிலும்

$d=0$ எனில் ஆதி கோளத்தின் மீதும்

$d<0$ எனில் ஆதி கோளத்தின் உள்ளும்

இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது.

மாதிரி 1 : கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோளத்தின் ஆரத்தையும், மையப்புள்ளியையும் காண்க :

$$2x^2+2y^2+2z^2+8x-8y-6z-1=0$$

கோளத்தின் சமன்பாட்டை

$x^2+y^2+z^2+4x-4y-3z-\frac{1}{2}=0$ என மாற்றி எழுதலாம்.

(அ-து.) $(x+2)^2+(y-2)^2+(z-\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{2}+4+4+\frac{9}{4}$

(அ-து.) $(x+2)^2+(y-2)^2+(z-\frac{3}{2})^2 = \left(\frac{\sqrt{43}}{2}\right)^2$

எனவே கோளத்தின் மையம் $(-2, 2, \frac{3}{2})$ எனவும்

ஆரம் $\frac{\sqrt{43}}{2}$ எனவும் நமக்குக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 2 : $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ புள்ளியை மையமாகவும் 1 அலகு ஆரமாகவும் உடைய கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

மையம் $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$; ஆரம் $=1$

எனவே கோளத்தின் சமன்பாடு

$(x+\frac{1}{3})^2+(y-\frac{2}{3})^2+(z-\frac{1}{3})^2 = 1^2$ என்பதாகும்.

(அ-து.) $3(x^2+y^2+z^2)+2x-4y-2z-1=0$

மாதிரி 3 : (0, 1, 3), (1, 2, 4), (2, 3, 1), (3, 0, 2) என்ற நான்கு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோளத்தைக் கண்டுபிடி.

கோளத்தின் சமன்பாட்டை

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ எனக் கொள்வோம்.

இக்கோணம் (0, 1, 3) புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$0+1^2+3^2+2u \,.\, 0+2 \,.\, v \,.\, 1+2w \,.\, z+d = 0$

(அ-து.) $2v+6w+d = -10$ (1)

இதுபோன்று, கோளம் (1, 2, 4), (2, 3, 1), (3, 0, 2)

புள்ளிகள் வழிச் செல்வதால் முறையே

$2u+4v+8w+d = -21$ (2)

$4u+6v+2w+d = -14$ (3)

$6u+4w+d = -13$ (4)

என்ற சமன்பாடுகள் நமக்குக் கிடைக்கின்றன.

இந்நான்கு சமன்பாடுகளை விடுவிக்க

$u=-\frac{7}{4},\ v=-\frac{3}{2},\ w=-\frac{9}{4},\ d=\frac{13}{2}$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே தேவையான கோளத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+z^2+2(-\frac{7}{4})x+2(-\frac{3}{2})y+2(-\frac{9}{4})z+\frac{13}{2}=0$

என்பதாகும்.

(அ-து.) $2(x^2+y^2+z^2)-7x-6y-9z+13=0$

மாதிரி 4 : ஒரு கோளம் (0, −2, −4), (2, −1, −1) புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது. கோளத்தின் மையம்

$4x-2y+4z+12=0 = 3x-y+z-2$ நேர்கோட்டிலிருக்கிறது. அக்கோளத்தின் சமன்பாடு காண்.

கோளத்தின் சமன்பாட்டை

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ எனக் கொள்வோம்.

இக்கோணம் $(0,-2,-4)$, $(2,-1,-1)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்வதால்

$$0+4+16+0-4v-8w+d = 0$$

$$(\text{அ-து.})\ -4v-8w+d = -20 \qquad (1)$$

$$4u-2v-2w+d = -6 \qquad (2)$$

மையம் $(-u, -v, -w)$ கொடுக்கப்பட்ட தளங்களிலிருப்பதால்

$$-4u+2v-4w = -12 \qquad (3)$$

$$-3u+v-w = 2 \qquad (4)$$

இந்நான்கு சமன்பாடுகளையும் விடுவிக்க

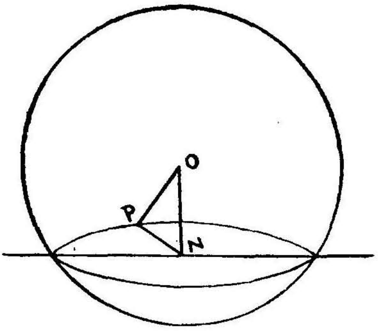
$u=-3,\ v=-2,\ w=5,\ d=12$

ஆகவே கோளத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+z^2-6x-4y+10z+12=0$ ஆகும்.

6. கோளத்தின் தளவெட்டுமுகம் (Plane section) ஒரு வட்டமாகும்.

O-வை கோளத்தின் மையமாகவும் r-ஐ அதன் ஆரமாகவும் கொள்வோம். P என்பது கொடுக்கப்பட்ட கோளத்திற்கும் தளத்திற்கும் பொதுவான ஒரு புள்ளியாகும். எனவே OP என்பது



படம் - 70

கோளத்தின் ஆரம். தளத்திற்கு O-விலிருந்து ON என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைவோம். எனவே ON, NPக்கு செங்குத்தாக இருக்கும். அதாவது $\triangle ONP$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

$$\therefore\ OP^2 = ON^2 + NP^2$$
$$(\text{அ-து.})\ NP^2 = OP^2 - ON^2$$
$$= r^2 - ON^2$$

இங்கு O, N என்ற இருபுள்ளிகளும் நிலையானவை. எனவே ON என்பது ஒரு மாறிலி. ஆகவே $NP^2 = r^2 - ON^2$ சமன்பாட்டிலிருந்து NP-யும் ஒரு மாறிலி என அறிகிறோம். இவ்வாறு P-ன் நியமபாதை N என்ற புள்ளியை மையமாகவும் NP-யை ஆரமாகவும் உடைய ஒரு வட்டம் எனத் தெரிகிறது. அதாவது கோளத்திற்கும், தளத்திற்கும் பொதுவான பகுதி (வெட்டுமுகம்) ஒரு வட்டமாகும்.

துணைமுடிபு : (i) மேலே குறிப்பிட்ட வட்டத்தைச் சிறு வட்டம் (Small circle) எனக் கூறுகிறோம்.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட தளம் கோள மையத்தின் வழிச் செல்லுமாயின் அவ்வட்டத்திற்கு ஆரம் r எனவாகும். இந்த வட்டத்திற்கு, பெரு வட்டம் (Great circle) என்று பெயர்.

7. கோளத்தின் மீது அமையும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காணுதல்.

கோளத்தின் வெட்டுமுகம் ஒரு வட்டமாக இருப்பதால் அவ்வட்டத்தை இரண்டு சமன்பாடுகளினால் குறிக்கலாம். அதாவது கோளம், தளம் இவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d = 0 \qquad (1)$$
$$lx+my+nz = p \qquad (2)$$

என்றிருப்பின், இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கே எடுத்துக் கொண்டு கோள வெட்டு முகவட்டத்தைக் குறிக்கலாம். எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகிய இரண்டுமேயாகும்.

மேலும் சமன்பாடுகள் (1), (2)-ம் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்குமாயின் அவ்வட்டத்தின் வழியே செல்லும் எந்த கோணத்தையும்

$$(x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d)+k(lx+my+nz-p)=0 \qquad (3)$$

என்ற சமன்பாட்டினால் குறிக்கலாம். இங்கு k என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறிலி. அதன் மதிப்பைக் கணக்கிட கோளத்தைப் பற்றிய நிபந்தனை ஒன்று கொடுக்கப்படவேண்டும்.

8. இரு கோளங்களின் வெட்டுமுகம் ஒரு வட்டமாகும்.

கோளங்களின் சமன்பாடுகளை

$$S_1 \equiv x^2+y^2+z^2+2u_1x+2v_1y+2w_1z+d_1=0 \ldots\ldots (1)$$
$$S_2 \equiv x^2+y^2+z^2+2u_2x+2v_2y+2w_2z+d_2=0 \ldots\ldots (2)$$

என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

இரண்டு கோளங்களுக்கும் பொதுவாக அமையும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கே திருப்தி செய்யும். எனவே அப்புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள்

$S_1 - S_2 \equiv 2(u_1 - u_2)\, x + 2(v_1 - v_2)y + 2(w_1 - w_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \ldots\ldots(3)$ என்ற சமன்பாட்டினையும் திருப்திப்படுத்த வேண்டும், ஆனால் சமன்பாடு (3) x, y, z என்ற மாறிகளின் ஒருபடிச் சமன்பாடாக இருப்பதால் (3) ஒரு தளத்தைக் குறிக்கும்.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட கோளங்கள் வெட்டும் புள்ளிகளும், அக் கோளங்களில் ஏதேனும் ஒன்றும், தளம் (3)-ம் வெட்டும் புள்ளிகளும் ஒன்றெனா அறிகிறோம். ஆகவே கோளங்கள் இரண்டின் பொதுப் புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின்மீதுதான் அமைய வேண்டும். அதாவது கோளங்களின் வெட்டுமுகம் ஒரு வட்டமாகும்.

மாதிரி 5 : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ கோளமும் $x + 2y + 2z - 20 = 0$ தளமும் (2, 4, 5) புள்ளியை மையமாகவும் $\sqrt{7}$-ஐ ஆரமாகவும் உடைய ஒரு வட்டத்தில் வெட்டிக்கொள்கின்றன எனக் காட்டு.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0 \ldots\ldots(1)$$

$$x + 2y + 2z - 20 = 0 \ldots\ldots(2)$$

கோளம் (1)ன் மையம் $C(1, 2, 3)$ எனவும் ஆரம் 4 எனவும் கிடைக்கின்றன.

தளம் (2)க்குச் செங்குத்தாக C வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகளை $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{2} \ldots\ldots(3)$ என எழுதலாம்.

எனவே இக்கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளை $(k+1, 2k+2, 2k+3)$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம். இங்கு k என்பது கண்டுபிடிக்கப்படவேண்டிய ஒரு மாறிலி. இந்தப் புள்ளி தளம் (2)-ன் மீது இருக்குமானால் $(k+1) + 2(2k+2) + 2(2k+3) - 20 = 0$ என்பது உண்மையாகும். இதைச் சுருக்க, $k = 1$ என்று கிடைக்கும். எனவே தளம் (2)-க்கும், நேர்கோடு (3)-க்கும் பொதுவான புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (2, 4, 5) என்பனவாகும்.

Cயிலிருந்து CN என்ற செங்குத்துக் கோட்டை தளம் (2)-க்கு வரைந்தால் Nன் ஆயத்தொலைகள் (2, 4, 5) ஆகும்.

அதாவது தேவையான வட்டத்தின் மையம் $N\,(2, 4, 5)$.

மேலும் P என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளியை அவ்வட்டத்தின்மீது எடுத்துக்கொண்டால் CP என்பது கோளத்தின் ஆரமெனவும்

NP என்பது வட்டத்தின் ஆரமெனவும் தெரியும். எனவே செங்கோண முக்கோணம் CNP-யிலிருந்து

$$NP^2 = CP^2 - CN^2$$
$$= 4^2 - [(2-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2]$$
$$= 7$$

வட்டத்தின் ஆரம் $= NP = \sqrt{7}$

மாதிரி 6: (1, 2, 3) புள்ளி வழியாகவும் $x^2+y^2+z^2=9$, $2x+3y+4z=5$ என்ற வட்டத்தின் வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தைக் காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடுகள் $x^2+y^2+z^2-9=0$; $2x+3y+4z-5=0$ என்பன. இவ்வட்டத்தின் வழியே செல்லும் எந்தக் கோளத்தையும் $(x^2+y^2+z^2-9)+k(2x+3y+4z-5) = 0$ என்ற சமன்பாட்டினால் குறிக்கலாம்.

இக்கோளம் (1, 2, 3) புள்ளிவழிச் செல்லுமாயின்

$$(1^2+2^2+3^2-9)+k(2\cdot1+3\cdot2+4\cdot3-5) = 0$$

என்பது உண்மையாகும்.

இதைச் சுருக்க $k = -\frac{1}{3}$

எனவே தேவையான கோளத்தின் சமன்பாடு

$$(x^2+y^2+z^2-9)-\tfrac{1}{3}(2x+3y+4z-5)=0 \text{ என்பதாகும்.}$$

(அ - து.) $3(x^2+y^2+z^2)-(2x+3y+4z+22)=0$.

மாதிரி 7: $x^2+y^2+z^2+2u_1x+2v_1y+2w_1z+d_1 = 0$ என்ற கோளம் $x^2+y^2+z^2+2u_2x+2v_2y+2w_2z+d_2=0$ என்ற கோளத்தை ஒரு பெருவட்டத்தில் வெட்டுமானால்

$$2u_1u_2+2v_1v_2+2w_1w_2-(d_1+d_2) = 2r_2^2 \text{ என்று நிறுபி.}$$

(இங்கு r_2 என்பது இரண்டாவது கோளத்தின் ஆரம்)

$$S_1 \equiv x^2+y^2+z^2+2u_1x+2v_1y+2w_1z+d_1=0 \ldots\ldots(1)$$
$$S_2 \equiv x^2+y^2+z^2+2u_2x+2v_2y+2w_2z+d_2=0 \ldots\ldots(2)$$

இப்பொழுது

$$S_1-S_2 \equiv 2(u_1-u_2)x+2(v_1-v_2)y+2(w_1-w_2)z+(d_1-d_2)=0 \ldots\ldots(3)$$

என்ற தளத்தைக் கவனிப்போம்.

கோளங்கள் (1), (2)க்குப் பொதுவான புள்ளிகளும் அக்கோளங்களில் ஏதேனும் ஒன்றும் தளம் (3)ம் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளும் ஒன்றென அறிவோம். எனவே, கோளம் (1), கோளம் (2)ஐ ஒரு

பெருவட்டத்தில் வெட்டினால், (2)ன் மையம் தளம் (3)-ல் அமைய வேண்டும்.

$\therefore\ 2(u_1-u_2)(-u_2)+2(v_1-v_2)(-v_2)+2(w_1-w_2)(-w_2)+(d_1-d_2)=0$

(அ - து.) $2u_1u_2+2v_1v_2+2w_1w_2-(d_1+d_2)=2(u_2^2+v_2^2+w_2^2-d_2)$

(அ - து.) $2u_1u_2+2v_1v_2+2w_1w_2-(d_1+d_2) = 2r_2^2$.

9. $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ என்ற கோளத்திற்கு (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு காணுதல்.

(x_1, y_1, z_1) புள்ளியை P எனக் கொள்வோம்.

கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0\ldots\ldots(1)$$

தேவையான தளம் P வழியாகச் செல்கிறது. மேலும் C என்பது கோளத்தின் மையமாயின் அத்தளம் CPக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

ஆனால் Cயின் ஆயத்தொலைகள் $(-u, -v, -w)$ ஆகும்.

எனவே CPயின் திசைக் கொசைன்கள் $u+x_1$, $v+y_1$, $w+z_1$, என்பனவற்றிற்குச் சம விகிதத்தில் இருக்கும்.

ஆகையால் அத்தளத்தின் சமன்பாடு

$$(x-x_1)(x_1+u)+(y-y_1)(y_1+v)+(z-z_1)(z_1+w)=0\ldots\ldots(2)$$

P என்ற புள்ளி கோளத்தின் மீதும் இருப்பதால்

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d = 0\ldots\ldots(3)$$

நிபந்தனை (3)ஐ பயன்படுத்தச் சமன்பாடு (2)ஐச் சுருக்குவோமாயின் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+zz_1+u(x+x_1)+v(y+y_1)+w(z+z_1)+d=0$$

எனக் கிடைக்கிறது.

துணை முடிவு: $x^2+y^2+z^2=r^2$ என்ற கோளத்தின் மீதுள்ள (x_1, y_1, z_1) புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1+zz_1 = r^2$ என்பதாகும்.

10. $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ கோளத்தை $lx+my+nz=p$ என்ற தளம் தொடவேண்டுமாயின் அதற்குரிய நிபந்தனை காணல்.

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0\ldots\ldots(1)$$

$$lx+my+nz=p\ldots\ldots\quad(2)$$

கோளத்தின் மையம் $(-u, -v, -w)$

கோளத்தின் ஆரம் $= \sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$

தளம் (2), கோளம் (1)-ஐத் தொடவேண்டுமாயின் கோள மையத்தி லிருந்து அத்தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் கோள ஆரத்திற்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

எனவே $\dfrac{l(-u)+m(-v)+n(-w)-p}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = \sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$

(அ - து.) $(lu+mv+nw+p)^2=(l^2+m^2+n^2)(u^3+v^2+w^2-d)$

11. கோளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு (Normal)

(1) வரையறை : கோளத்தின் மீதுள்ள P என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடு தளத்திற்குச் செங்குத்தாக, அப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டினை, கோளத்திற்கு P வழியாக வரை யப்படும் செங்குத்துக்கோடு எனக் கூறுகிறோம்.

(2) சமன்பாடு காணுதல் : கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$......(1) என்க.

கோளத்தின் மீதுள்ள $P(x_1, y_1, z_1)$ புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1+zz_1+u(x+x_1)+v(y+y_1)+w(z+z_1)+d=0$ என்பதாகும்.

(அ - து.) $(x_1+u)x+(y_1+v)y+(z_1+w)z+(ux_1+vy_1+wz_1+d)=0$......(2)

இங்கு (x_1+u), (y_1+v), (z_1+w) என்பன தொடுதளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமையும் நேர்கோட்டின் திசை விகிதங்களாகும் (Direction-Ratios).

எனவே $P(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளி வழிச்செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடுகள் $\dfrac{x-x_1}{x_1+u}=\dfrac{y-y_1}{y_1+v}=\dfrac{z-z_1}{z_1+w}$ என்பனவாகும்.

குறிப்பு : வேறு ஒரு முறையிலும் இச்சமன்பாடுகளைப் பெற முடியும். குறிப்பாக, கோளத்திற்கு P வழியாக வரையப்படும் செங் குத்துக்கோடு, அக்கோள மையத்தின் வழியாகச் செல்லும். எனவே தேவையான செங்கோடு $(-u, -v, -w)$, (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளி களை இணைக்கும் நேர்கோடு என அறிகிறோம். ஆகையால் அக்கோட் டின் சமன்பாடுகள் $\dfrac{x-x_1}{x_1-(-u)}=\dfrac{y-y_1}{y_1-(-v)}=\dfrac{z-z_1}{z_1-(-u)}$ என்பனவாகும்.

(அ - து.) $\dfrac{x-x_1}{x_1+u}=\dfrac{y-y_1}{y_1+v}=\dfrac{z-z_1}{z_1+w}$.

மாதிரி 8 : $x-2y-2z+1=0$ என்ற தளத்திற்கு இணையாக வரையப்படும் தொடுதளங்கள் $x^2+y^2+z^2+2x-4z-4=0$ என்ற கோளத்தைத் தொடும் புள்ளிகளைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தளத்திற்கு இணையான ஏதாவது ஒரு தளத்தை $x-2y-2z+k=0 \ldots (1)$ என்று குறிப்பிடலாம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோளம்

$x^2+y^2+z^2+2x-4z-4=0 \ldots\ldots (2)$ என்பதாகும்.

கோளத்தின் மையம் $(-1, 0, 2)$

கோளத்தின் ஆரம் $= \sqrt{1+4+4}=3$.

தளம் (1) கோளம் (2)-ஐத் தொடவேண்டுமானால்

$$\frac{-1-4+k}{\sqrt{1+4+4}} = \pm 3$$ என்பது உண்மையாகும்.

அதாவது $k=-4, 14$ என இருக்கவேண்டும்.

எனவே தேவையான தொடுதளங்கள்

$x-2y-2z-4=0 \ldots\ldots (3)$

$x-2y-2z+14=0 \ldots\ldots (4)$ என்பனவாகும்.

இத்தளங்களுக்குச் செங்குத்தாக, கோள மையத்தின் வழியே செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-(-1)}{1} = \frac{y-0}{-2} = \frac{z-2}{-2} = r$$ என எழுதலாம்.

எனவே இக்கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை

$(r-1, -2r, -2r+2)$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

இப்புள்ளி தளம் (3)-ன் மீது அமையுமானால்

$r-1-2(-2r)-2(-2r+2)-4=0$ (அ - து.) $r=1$.

எனவே தளம் (3) கோளத்தைத் தொடும் புள்ளி $(0, -2, 0)$ என அறிகிறோம்.

இது போன்று தளம் (4) கோளத்தை $(-2, 2, 4)$ என்ற புள்ளியில் தொடும் என அறியலாம்.

மாதிரி 9 : $x^2+y^2+z^2+2x=8$ என்ற கோளத்திற்கு $x+y=5$, $x-2z=2$ என்ற கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தொடுதளங்களைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோளத்தின் மையம் $(-1, 0, 0)$ ஆரம் $=3$.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோட்டின் வழியே செல்லும் ஏதேனும் ஒரு தளத்தின் சமன்பாட்டை $x+y-5+\lambda(x-2z-2)=0$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

(அ - து.) $(\lambda+1)x+y-2\lambda z-(2\lambda+5)=0$

இத்தளம் கோளத்தைத் தொடவேண்டுமாயின்

$$\frac{-(\lambda+1)-(5+2\lambda)}{\sqrt{(\lambda+1)^2+1+4\lambda^2}}=\pm 3$$

(அ - து.) $2\lambda^2-\lambda-1=0$

(அ - து.) $\lambda=-\frac{1}{2}, 1$

எனவே தேவையான தளங்களின் சமன்பாடுகள் $2x+y-2z=7$, $x+2y+2z=8$ என்பனவாகும்.

மாதிரி 10 : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, x, y, z ஆயங்களை A, B, C-ல் வெட்டினால் முக்கோணம் ABC-யின் சுற்றுவட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

A, B, C புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் முறையே (a, o, o), (o, b, o), (o, o, c) ஆகும்.

O-ஆதியானால், கோளம் $OABC$-யின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$ எனக் காணலாம்.

ஆகவே முக்கோணம் ABC-யின் சுற்றுவட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ஆகும்.

பயிற்சிகள்–13

1. ஒரு கோளம் $(3, 0, 2)$, $(-1, 1, 1)$, $(2, -5, 4)$ புள்ளிகள் வழிச்செல்கிறது. அதன் மையம் $2x+2y+4z=6$ என்ற தளத்தில் அமைந்திருக்கிறது. கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+4y-6z-1=0$ எனக் காண்பி.

2. ஆயங்களை A, B, C புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொண்டு ஆதி O வழிச்செல்லும் கோளத்தின் ஆரம் நிலையெண் r. ஆதி O-விலிருந்து தளம் ABC-க்கு வரையப்படும் செங்குத்து அடியின் இயங்குவரை காண்க. விடை : $(x^2+y^2+z^2)(x^{-2}+y^{-2}+z^{-2})=4r^2$

3. நிலைப்புள்ளி (a, b, c) வழியாகச் செல்லும் தளம் ஆயங்களை A, B, C புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. கோளம் $OABC$-யின் மையத்தின் இயங்குவரை காண்க. விடை : $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$

4. $x^2+y^2+z^2=a^2$ கோளத்திற்கு $(a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\varphi)$ புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு காண்.

விடை : $x\cos\theta\sin\varphi+y\sin\theta\sin\varphi+z\cos\varphi=a$.

5. $x^2+y^2+z^2=25$, $x^2+y^2+z^2-24x-40y-18z+225=0$ கோளங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன என நிரூபி. தொடுபுள்ளியைக் கண்டுபிடி. விடை : $(\frac{12}{5}, \frac{20}{5}, \frac{9}{5})$

6. $x^2+y^2+z^2-x+4z=0$ கோளத்திற்கு, தளம் $x-4y=5$-க்கு இணையாக உள்ள தொடு தளங்களின் (Tangent planes) சமன்பாடுகள் காண்க.

விடை : $x-4y=2$.
$x-4y+8=0$.

7. வட்டங்கள் $x^2+y^2+z^2-2x+3y+4z-5=0$, $5y+6z+1=0$; $x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z-6=0$, $x+2y-7z=0$ ஒரே கோளத்தில் அமைந்திருக்கின்றன என நிரூபி. கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. விடை : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$.

8. (α, β, γ) புள்ளி வழியாக $z=0$, $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாடு காண்.

விடை : $\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)=z(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2)$

9. $3x+4z+5=0$ தளத்தைத் தொட்டுக்கொண்டு $x^2+z^2-6x-2z+5=0$; $y=0$ வட்டத்தின் வழியாகச்செல்லும் கோளங்களின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

விடை : $x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z+5=0$
$4(x^2+y^2+z^2)-24x-11y-8z+20=0$

10. $lx+my+nz+p=0$ என்ற தளம் $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ கோளத்தை $\left\{r^2-\frac{la+mb+nc+p}{l^2+m^2+n^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$ ஆரமுள்ள வட்டத்தில் வெட்டும் என நிரூபி.

11. $\frac{x+3}{4}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-8}{-5}$ நேர்கோடு $x^2+y^2+z^2+2x-10y-23=0$ கோளத்தை வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

விடை : $(1, -1, 3)$; $(5, 2, -2)$

12. $x^2+y^2+z^2-6x+2z+1=0$ கோளத்தை $(2, -2, 1)$ புள்ளியில் தொட்டுக்கொண்டு ஆதிவழிச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாடு காண். விடை : $4(x^2+y^2+z^2)-25x-2y+10z=0$

III. திரிகோண கணிதம்

(TRIGONOMETRY)

13. கோண விகிதச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

(Solutions of Simple Trigonometric Equations)

1. ஒரு மாறிகொண்ட கோண விகித சமன்பாட்டை, அதைச் சீர் செய்யும் எல்லா மதிப்புகளையும் கண்டறிந்தால் தான், தீர்த்ததாகக் கருத முடியும். ஏனெனில் ஒரு சாதாரண சமன்பாட்டின் மூலங்கள் அதன் படியைப் பொருத்து அமைகின்றன. ஆனால் கோண விகிதச் சமன்பாட்டினை, கோணத்தின் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மதிப்புகள் சீர்செய்யும்.

2. $\sin\theta = s$. $|s| < 1$ என்றுள்ள சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணல்.

α என்பது $\sin\theta = s$ சமன்பாட்டைச் சீர் செய்யும் θ வின் குறைந்த மதிப்பு எனக் கொள்வோம்.

ஆகவே $\sin\alpha = s$

(அ - து.) $\sin\theta - \sin\alpha = 0$

$$2\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$$

$$\therefore\ \cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0 \text{ அல்லது } \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$$\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0 \text{ எனில் } \frac{\theta+\alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{......(1)}$$

(அ - து.) $\theta=-\alpha+(2n+1)\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2\ldots\ldots)$

$\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$ எனில் $\frac{\theta-\alpha}{2}=n\pi$

(அ - து.) $\theta=\alpha+2n\pi\ldots\ldots(2)$

(1), (2) இவற்றிலிருந்து

$\theta=(-1)^r\alpha+r\pi$ $(r=0, \pm 1, \pm 2,\ldots\ldots)$

3. $\cos\theta=c$ ($|c|<1$) சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணல்.

α என்பது $\cos\theta=c$ சமன்பாட்டைச் சீர்செய்யும் θ-வின் மிகக் குறைந்த மதிப்பு எனக் கொள்வோம்.

ஆகவே $\cos\alpha=c$

(அ - து.) $\cos\theta-\cos\alpha=0$

(அ - து.) $2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$

$\therefore$ $\sin\frac{\theta+\alpha}{2}=0$ அல்லது $\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$

$\sin\frac{\theta+\alpha}{2}=0$ எனில் $\frac{\theta+\alpha}{2}=n\pi$

(அ - து.) $\theta=-\alpha+2n\pi\ldots\ldots(1)$

$\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$ எனில் $\frac{\theta-\alpha}{2}=n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2\ldots\ldots)$

(அ - து.) $\theta=+\alpha+2n\pi\ldots\ldots(2)$ $(n=0, \pm 1, \pm 2\ldots\ldots)$

(1), (2) இவற்றிலிருந்து

$\theta=\pm\alpha+2r\pi$ $(r=0, \pm 1, \pm 2\ldots\ldots)$

4. $\tan\theta=t$ சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்.

$\tan\theta=t$ $\quad t=\tan\alpha$ எனக் கொள்வோம்.

$\tan\theta=\tan\alpha=\tan(\alpha+r\pi)$

$\therefore$ $\theta=\alpha+r\pi,$ $(r=0, \pm 1, \pm 2\ldots\ldots)$

மாதிரி 1: $\sin 7\theta-\sin\theta=\sin 3\theta$ சமன்பாட்டைத் தீர்.

$\sin 7\theta-\sin\theta = 2\sin 3\theta\cos 4\theta$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$2\sin 3\theta\cos 4\theta=\sin 3\theta$ என்றாகிறது.

$\sin 3\theta(2\cos 4\theta-1)=0$

$\therefore$ $\sin 3\theta=0$ or $\cos 4\theta=\frac{1}{2}$

$\sin 3\theta = 0$ எனில் $3\theta = n\pi$ (அ - து.) $\theta = \frac{n\pi}{3}$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots)$

$\cos 4\theta = \frac{1}{2}$ எனில் $4\theta = \frac{\pm\pi}{3} + 2n\pi$ (அ - து.) $\theta = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots)$

$\therefore\ \theta = \frac{n\pi}{3}$ அல்லது $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots)$

மாதிரி 2: $3\sin 2\theta + 2 - \operatorname{cosec} 2\theta = 0$ சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு காண்க.

$$3\sin 2\theta + 2 - \frac{1}{\sin 2\theta} = 0$$

$$3(\sin 2\theta)^2 + 2\sin 2\theta - 1 = 0$$

$$(3\sin 2\theta - 1)(\sin 2\theta + 1) = 0$$

$$\therefore\ \sin 2\theta = \tfrac{1}{3} = \cdot 3333 = \sin 19^\circ\, 28'$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}[n\pi + (-1)^n\, 19^\circ\, 28'] \ldots\ldots (1)$$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$

அல்லது $\sin 2\theta = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\left[n\pi - \left(\frac{\pi}{2}\right)(-1)^n\right] \ldots\ldots (2)$$

(1), (2)ம் சேர்ந்து சமன்பாட்டைச் சீர் செய்யும் θவின் மதிப்புகளைத் தருகிறது.

மாதிரி 3: $\tan 3\theta - 4\tan\theta = 0$ சமன்பாட்டைத் தீர்.

$\tan\theta = t$ ஆனால்

$$\frac{3t - 3t^3}{1 - 3t^2} - 4t = 0$$

$$3t - t^3 - 4t\,(1 - 3t^2)] = 0$$

$$t[3 - t^2 - 4\,(1 - 3t^2)] = 0$$

$$t(11t^2 - 1) = 0$$

$t = 0$ அல்லது $11t^2 = 1$

$\tan\theta = 0$ அல்லது $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{11}} = \pm\frac{\sqrt{11}}{11} = \pm\frac{3\cdot 317}{11}$

$= \pm\cdot 3015 = \tan(\pm 16^\circ\, 47')$

ஆகவே, $\theta = n\pi$, அல்லது $\theta = \pm 16^\circ\, 47' + n\pi$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$

மாதிரி 4 : $3 \sin 2x+4 \sin^2 x=2$ சமன்பாட்டைத் தீர்.

$$6 \sin x \cos x+4 \sin^2 x-2=0$$

$\cos^2 x$-ஆல் வகுக்க, $6 \tan x+4 \tan^2 x-2(1+\tan^2 x)=0$

$$\tan^2 x+3 \tan x-1=0$$

$$\tan x = \frac{-3\pm\sqrt{9+4}}{2}$$

$$\tan x = \frac{-3\sqrt{13}}{2} = \tan(-73^\circ\ 9')$$

$$x = -73^\circ\ 9'+n\pi\ldots\text{(i)}\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2.)$$

அல்லது $\tan x = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ எனில்

$$\tan x = \tan 16^\circ\ 51'$$

$$x = 16^\circ\ 51'+n\pi\ldots(2)\ (n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$$

(1), (2)ம் சேர்ந்து சமன்பாட்டைச் சீர்செய்யும் θன் எல்லா மதிப்புகளையும் கொடுக்கிறது.

பயிற்சிகள் 14

கீழ்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர் :

(i) $\sin 4\theta-\sin 2\theta = \sin 6\theta$

விடை : $\theta = \frac{2}{3} n\pi\pm6$, அல்லது $n\pi+\frac{\pi}{4}$ அல்லது $n\pi$

(ii) $2 \sin 5\theta+3-2 \operatorname{cosec} 5\theta=0$

விடை : $\theta = \dfrac{n\pi}{5}+(-1)\dfrac{\pi}{30}$

(iii) $\sec^2 \theta+2 \tan \theta=4$

விடை : $\theta = n\pi+\frac{\pi}{4}$ அல்லது $n\pi-71^\circ\ 34'$

(iv) $\cos 3x-\cos 4x = \cos 5x-\cos 6x.$

விடை : $x = n\pi$ அல்லது $n\pi\pm20^\circ$.

(v) $2 \cos^2 x+1 = 4 \sin x \cos x.$

விடை : $x = \frac{\pi}{4}+n\pi$ அல்லது $71^\circ\ 30'+n\pi$

5. $a \cos\theta \pm b \sin\theta = c$ போன்ற சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காணல்.

$a \cos \theta\pm b \sin \theta$வை $r \cos(\theta\pm\alpha)$ எனும் வடிவில் எழுதலாம். எனவே (2) அல்லது (3) முறைகளை உபயோகித்துத் தீர்வுகாணலாம்.

மாதிரி: $15 \cos\theta - 8 \sin\theta = 10$ சமன்பாட்டைத் தீர்.

$\sqrt{15^2+8^2} = 17$

$$\frac{15}{\sqrt{15^2+8^2}}\cos\theta - \frac{8}{\sqrt{15^2+8^2}}\sin\theta = \frac{10}{\sqrt{15^2+8^2}}$$

$$\frac{15}{17}\cos\theta - \frac{8}{17}\sin\theta = \frac{10}{17}$$

$\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ எனும் வகையில் α-வைத் தேர்ந்தெடு.

இங்கு $\alpha = 28^\circ\ 4'$

$$\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta = \frac{10}{17}$$

$\cos(\theta+\alpha) = \frac{10}{17} = \cos\beta$ ஆனால் $\beta = 53^\circ\ 59'$

$$\theta+\alpha = \pm\beta+2n\pi$$
$$\theta = -\alpha\pm\beta+2n\pi$$

$n=0$ ஆனால் $\theta = \pm\beta-\alpha = \pm 53^\circ\ 59' - 28^\circ\ 4'$

$= -82^\circ\ 03'$ அல்லது $25^\circ\ 55'$

$n=1$ ஆனால் $\theta = 2\pi-\alpha\pm\beta$

$= 360^\circ - 28^\circ\ 4' \pm 53^\circ\ 59'$

$= 277^\circ\ 57'$ அல்லது $385^\circ\ 55'$

0, 2πக்கு இடையேயுள்ள மதிப்புகள் $25^\circ\ 55'$, $277^\circ\ 57'$.

பயிற்சிகள் 14

கீழ்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்: (0°விலிருந்து, 360°க்கு இடைப்பட்ட xன் மதிப்புகள் காண்.)

(i) $2\cos x+5\sin x = 4$

விடை: $x = 68^\circ\ 8' + 42^\circ 12' + 2n\pi$

(ii) $3\sin x+4\cos x = \frac{3}{2}$

விடை: $x = 36^\circ\ 52' \pm 72^\circ\ 32' + 2n\pi$

(iii) $8\cos x+15\sin x = -5{\cdot}1$

விடை: $x = 61^\circ\ 56' \pm (-72^\circ\ 32') + 2n\pi$

(iv) $4\cos x+3\sin x = 2$

விடை: $x = 36^\circ\ 25' + n{\cdot}360^\circ \pm 66^\circ\ 25'$

(v) $\sqrt{3}\cos x+\sin x = \frac{1}{2}$

விடை: $x = 30^\circ + 75^\circ\ 31' + n{\cdot}360^\circ$

14. சிக்கலெண்கள்

(Complex Numbers)

1. x, y இரு மெய் யெண்களானல் $x+iy$ $(i=\sqrt{-1})$ ஒரு சிக்க லெண். x — மெய்ப் பகுதி எனவும், y — கற்பனைப் பகுதி எனவும் கூறப் படும்.

2. இரண்டு சிக்கலெண்கள் சமமானல், அவைகளின் மெய்ப் பகுதிகளும், கற்பனைப் பகுதிகளும் தனித்தனியே சமம். அதாவது $x_1+iy_1=x_2+iy_2$ என்ருல் $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ ஆகும்.

$x_1+iy_1=x_2+iy_2$ எனக் கொள்வோம்.

$$x_1-x_2=i(y_2-y_1)$$

$$\therefore\ (x_1-x_2)^2=-(y_1-y_2)^2$$

(அ - து.) $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=0$

$x_1-x_2=0$, $y_1-y_2=0$ ஆக இருந்தால் தான்

$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=0$ என்பது உண்மையாகும்.

$$\therefore\ x_1=x_2\ ;\ y_1=y_2.$$

குறிப்பு: $x+iy=0$ ஆனல் $x=0$, $y=0$ ஆகும்.

3. $(x+iy)$-யையும் $(x-iy)$-யையும் பெருக்கினல் x^2+y^2 என்ற மெய்யெண் கிடைக்கும். இவ்வாறு அமைந்த இரு சிக்கலெண்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணை எனப்படும். அதாவது $(x-iy)$ என்பது $(x+iy)$-யின் இணைச் சிக்கலெண் (Conjugate complex number.)

4. சிக்க லெண்கள் கீழ்கண்ட இயற்கணித அடிப்படை விதி களுக்கு உட்படுகின்றன.

(i) கூட்டல்

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

(ii) கழித்தல்

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

(iii) பெருக்கல்

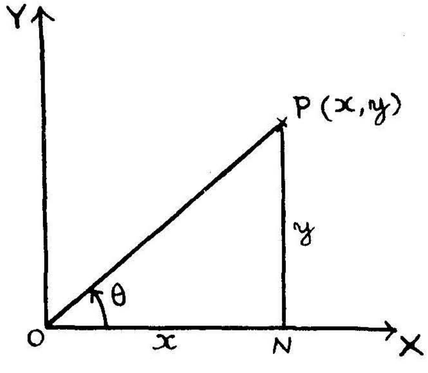
$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2+i(x_1y_2+x_2y_1)+i^2y_1y_2$$
$$= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

(iv) வகுத்தல்

$\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \alpha+i\beta$ எனக் கொள்வோம்.

$$x_1+iy_1 = (\alpha+i\beta)(x_2+iy_2)$$
$$(x_1+iy_1)(x_2-iy_2) = (\alpha+i\beta)(x_2^2+y_2^2)$$
$$(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2) = (\alpha+i\beta)(x_2^2+y_2^2)$$
$$\therefore \alpha+i\beta = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2},\ = i\ \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

5. சிக்கலெண்களின் மட்டு—வீச்சு அமைப்பு (Modulus-Amplitude form Complex numbers).



படம் - 71

படத்தில் P, $x+iy$ என்ற சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கிறது.

$OP=r$ என்றும் $N\hat{O}P=\theta$ என்றும் கொண்டால்

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta.$$

எனவே $x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

இதில் r - சிக்கலெண்ணின் மட்டு எனவும்

θ - அதன் வீச்சும் எனவும் கூறப்படும்.

எனவே இந்த அமைப்பிற்கு மட்டு - வீச்சு அமைப்பு எனப் பெயர்.

இதிலிருந்து ஒரு சிக்கலெண்ணின் மட்டு அது குறிக்கும் புள்ளிக்கும் ஆதிக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் எனவும், வீச்சு x-ஆயத் திற்கும், ஆரைத்திசைக்கும் (Radius rector) இடையேயுள்ள கோணம் என்று அறிகிறோம். x-ஆயம் மெய் ஆயம் (Real axis) எனவும், y-ஆயம் கற்பனை ஆயம் (Imaginary axis) எனவும் கூறப் படுகிறது.

மேலும் $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

r-தூரத்தைக் குறிப்பதால் மிகை எண்ணாகக் கொள்கிறோம். r-ஒரே ஒரு மதிப்புடையது (single-valued) ஆனால் θ-பல மதிப்பு களுடையது (Many-valued) ஆனால் $-\pi$-க்கும், π-க்கும் இடையே யுள்ள அதன் (θ-ன்) மதிப்பு தலையாய மதிப்பு (principal value) எனப்படும்.

6. இரண்டு சிக்கலெண்களின் பெருக்குத் தொகையாக வரும் சிக்கலெண்ணின் மட்டு, அவற்றின் மட்டுகளின் பெருக்குத் தொகை யாகவும், வீச்சு அவற்றின் வீச்சுகளின் கூடுதலாகவும் இருக்கும்.

$x_1+iy_1 = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

$x_2+iy_2 = r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ ஆனால்

$$\begin{aligned}(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) &= r_1r_2\{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\}\\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}\end{aligned}$$

எனவே இரண்டு சிக்கலெண்களின் பெருக்குத் தொகையாக வரும் சிக்கலெண்ணின் மட்டு அவற்றின் மட்டுகளின் பெருக்குத் தொகை யாகவும், வீச்சு அவற்றின் வீச்சுகளின் கூடுதலாகவும் வரும்.

கிளைத்தேற்றம் : $\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$-யின் மட்டு $\dfrac{r_1}{r_2}$ எனவும் வீச்சு $\theta_1-\theta_2$ எனவும் இருக்கும்.

$\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ எனக் கொள்வோம்.

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$
$$= r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\, r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$= rr_2\{\cos(\theta+\theta_2)+i\sin(\theta+\theta_2)\}$$
$$\therefore \quad r_1=rr_2;\ \theta_1=\theta+\theta_2$$
$$r = \frac{r_1}{r_2},\ \theta=\theta_1-\theta_2.$$

மாதிரி 1: A, B இரு மெய்யெண்கள். $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$-ஐ $1+iB$ வடிவில் எழுதுக.

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)}{1-i}\frac{(1+i)}{1+i}=\frac{(1+i)^2}{1^2-i^2}$$
$$=\frac{1+i^2+2i}{2}=\frac{1-1+2i}{2}=i$$
$$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=(i)^2=-1$$

எனவே $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ ஒரு மெய்யெண். மதிப்பு -1 ஆகும்.

மாதிரி 2: பின்வரும் சிக்கலெண்களை மட்டு - வீச்சு அமைப்பில் (modulus amplitude form) எழுதுக.

(i) $12+5i$ (ii) $-1+i\sqrt{3}$ (iii) $\frac{1+i}{1-i}$

r-மட்டு என்றும் θ வீச்சு என்றும் கொள்வோம்.

(i) $12+5i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

இரு பக்கங்களிலுள்ள மெய், கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன்படுத்தினால் $12 = r\cos\theta$, $5=r\sin\theta$

$$r^2 = 12^2+5^2=169$$
$$\therefore r = 13$$
$$\therefore \cos\theta = \tfrac{12}{13},\ \sin\theta=\tfrac{5}{13}$$

$\theta=22°37'$. θ முதல் கால் பகுதியிலிருக்கிறது.

(ii) $-1+i\sqrt{3} = r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$\therefore r\cos\theta = -1,\ r\sin\theta=\sqrt{3}$$
$$r^2 = 4\ (\text{அ - து.})\ r=2$$
$$\cos\theta = -\tfrac{1}{2},\ \sin\theta=\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$\theta=\frac{2\pi}{3}$. θ இரண்டாவது காற்பகுதி (second quadrant) யிலிருக்கிறது.

ஆகவே $-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(iii) $\frac{1+i}{1-i}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

(அ-து.) $\frac{1+i}{1-i}\,\frac{1+i}{1+i}=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$\frac{2i}{2}=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$r\cos\theta=0;\quad r\sin\theta=1$$

$$r^2=1\quad\therefore\ r=1$$

$$\cos\theta=0,\quad \sin\theta=1\quad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1+i}{1-i}=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

மாதிரி 3 : $\frac{(1+i)\,(1+2i)}{1+3i}$-ன் மட்டு, வீச்சு ஆகியவைகளைக் கண்டுபிடி.

$$\frac{(1+i)\,(1+2i)}{1+3i}=\frac{1+3i-2}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i}$$

$$=\frac{-(1-3i)^2}{1+9}=\frac{8+6i}{10}$$

$=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$ எனக் கொள்.

$$r\cos\theta=\tfrac{4}{5},\quad r\sin\theta=\tfrac{3}{5}$$

$r^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1$ (அ-து.) $r=1$

$$\tan\theta=\tfrac{3}{4}\quad\therefore\ \theta=\tan^{-1}\tfrac{3}{4}$$

கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலெண்ணின் மட்டு $=1$; வீச்சு $=\tan^{-1}\frac{3}{4}$

மாதிரி 4 : $z=\cos\theta+i\ \sin\theta$ ஆனால் $\frac{1+z}{1-z}=i\cot\frac{\theta}{2}$ என நிரூபி.

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}-i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \cot\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \cot\frac{\theta}{2}\cdot\frac{i\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= i\cot\frac{\theta}{2}$$

பயிற்சிகள் 15

1. பின்வரும் சிக்கலெண்களை $x+iy$ வடிவில் எழுதுக.

(i) $\frac{1}{3+2i}+\frac{1}{2+3i}$ — விடை : $\frac{5}{13}(1-i)$

(ii) $\frac{1}{4-3i}-\frac{1}{3+4i}$ — விடை : 0

(iii) $\frac{2+5i}{4-3i}$ — விடை : $-\frac{7}{25}+i\frac{26}{25}$

(iv) $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^3$ — விடை : $-\frac{7}{25}+i\frac{24}{25}$

2. பின்வரும் சிக்கலெண்களுக்கு இணைச் சிக்கலெண்கள் காண்க.

(i) $\frac{i-2}{(2i-1)^2}$ — விடை : $\frac{2+11i}{25}$

(ii) $\frac{3+4i}{5-6i}$ — விடை : $\frac{1}{61}(-9-38i)$

3. பின்வரும் சிக்கலெண்களின் மட்டு, வீச்சுகளைக் காண்க.

(i) $\frac{5+i}{2+3i}$ — விடை : $r=\sqrt{2},\ \theta=-\frac{\pi}{4}$

(ii) $\frac{i-3}{i+1}$ — விடை : $r=\sqrt{5},\ \theta=\tan^{-1}(-2)$

(iii) $\frac{(1+i)(2+i)}{3-i}$ — விடை : $r=1,\ \theta=\frac{\pi}{2}$

(iv) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — விடை : $r=1,\ \theta=\frac{\pi}{3}$

(v) $(1+i)(3+4i)$ விடை : $r=5\sqrt{2},\ \theta=\tan^{-1}(-7)$

(vi) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})(2\sqrt{3}+2i)}{3(1+i)}$ விடை : $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$

4. $x+iy=\dfrac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$ என்றால் $(x-1)(x-3)+y^2=0$ என நிரூபி.

5. $\dfrac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}=i(\tan\theta+\sec\theta)$ எனக் காண்பி.

6. $z=x+iy=\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta+1}$ என்றால் zன் இயங்கு வரை y-அச்சுக்கு இணையான நேர்கோடு எனக் காண்பி.

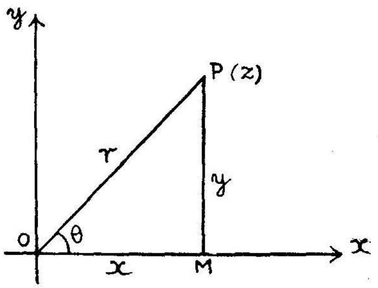
7. $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$; $y=\cos\beta+i\sin\beta$; $z=\cos r+i\sin r$, $x+y+z=0$ என்றால் $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ எனக் காட்டு.

8. $u=\cos\theta+i\sin\theta$ எனில்
$1+u+u^2=(1+2\cos\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$ எனக் காண்பி.

9. $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\ldots\ldots(a_n+ib_n)=A+iB$ என்றால்
$\tan^{-1}\dfrac{b_1}{a_1}+\tan^{-1}\dfrac{b_2}{a_2}+\ldots+\tan^{-1}\dfrac{b_n}{a_n}=\tan^{-1}\left(\dfrac{B}{A}\right)+n\pi$ என நிரூபி.

10. A, B, C முறையே $-2-3i$, $3+5i$, $2+i$ சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றது. முக்கோணம் ABCயின் திணிவு மையம் (centroid) G-ஐக் குறிக்கும் சிக்கலெண்ணின் மட்டு, வீச்சு ஆகியவைகளைக் காண்க. விடை : $\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}$

7. ஆகன் வரைபடம் (Argand Diagram)



படம் - 72

$z = x + iy$ ஒரு சிக்கலெண். இதை ஆயதளத்தில் P எனும் புள்ளியால் குறிக்கலாம். Pயின் ஆயத்தொலைகள் (x, y). சிக்கலெண்கள் புள்ளிகள் மூலம் குறிக்கப்படும் வரைபடத்திற்கு ஆகன் வரைபடம் (Argand diagram) எனப் பெயர். x, y ஆயங்கள் முறையே மெய் ஆயம், கற்பனை ஆயம் எனக் கூறப்படும்.

8. வெக்டர் முறை விளக்கம் (Vector Representation).

இரு சிக்கலெண்களின் கூடுதல் அல்லது வித்தியாசத்தை ஆகன் வரைபடத்தில் குறிப்பிடல்.

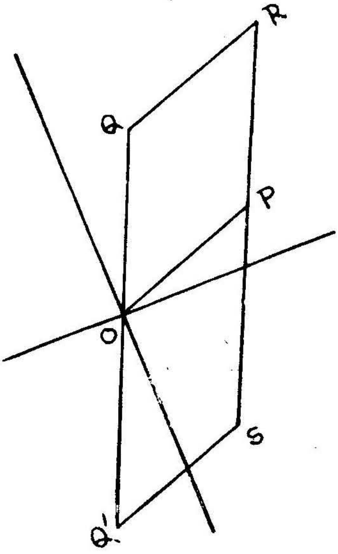
P சிக்கலெண் z_1ஐயும் Q சிக்கலெண் z_2-ஐயும் குறிக்கட்டும். $OPRQ$ இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்.

$$z_1 + z_2 = \overline{OP} + \overline{OQ}$$
$$= \overline{OP} + \overline{PR}$$
$$= \overline{OR}$$

R சிக்கலெண்கள் z_1, z_2களின் கூட்டுத் தொகையைக் குறிக்கும்.

QOஐ Q' வரை $OQ = OQ'$ இருக்கும்படி நீட்டு.

$$\overline{OQ}' = -\overline{OQ} = -z^z$$
$$\therefore\ z_1 - z_2 = \overline{OP} + \overline{OQ}'$$
$$= \overline{OP} + \overline{PS}$$
$$= \overline{OS}$$



படம் - 78

S சிக்கலெண்கள் z_1, z_2களின் வித்தியாசத்தைக் குறிக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் 1 : முக்கோணம் OPRல்

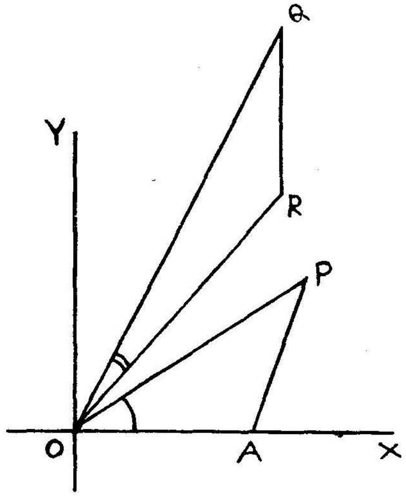
$$QR \leq QP + PR$$
$$\therefore\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

எனவே இரண்டு சிக்கலெண்களின் கூடுதலான சிக்கலெண்களின் மட்டு, சிக்கலெண்களின் மட்டுகளின் கூடுதலைவிட அதிகமாக இருக்க முடியாது.

கிளைத்தேற்றம் 2 : முக்கோணம் OPRல்

$$OR > OP \sim PR$$
$$|z_1 \mp z_2| > |z_1| \sim |z_2|.$$

9. இரு சிக்கலெண்களின் பெருக்கம் (Product of two Complex numbers)



படம் - 74

A, P, Q முறையே 1, x_1+iy_1, x_2+iy_2 எண்களைக் குறிக்கட்டும்.

APயைச் சேர். $\triangle OAP$க்கு வடிவொத்ததாக OQன் மேல் $\triangle OQR$ஐ வரை.

$$Q\hat{O}R = A\hat{O}P = \theta_1 \quad \begin{cases} x_1+iy_1 = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1) \\ x_2+iy_2 = r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \end{cases}$$

படத்தில் $X\hat{O}R = X\hat{O}Q+Q\hat{O}R$

$$= X\hat{O}Q+A\hat{O}P$$

$$= \theta_2+\theta_1$$

$$\frac{OR}{OP} = \frac{OQ}{OA} \quad \therefore OR = OP\cdot OQ. \quad (\because OA=1)$$

(அ - து.) $OR = r_1\cdot r_2$.

சிக்கலெண்களின் பெருக்கத்தின் மட்டு $= OR = r_1r_2$

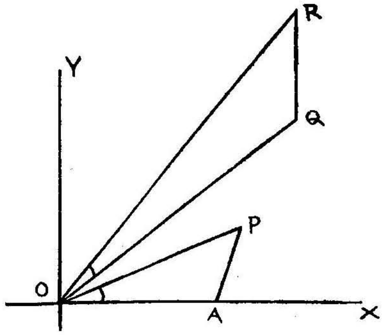
= சிக்கலெண்களின் மட்டுகளின் பெருக்கம்.

சிக்கலெண்களின் பெருக்கத்தின் வீச்சு $= X\hat{O}R = \theta_2+\theta_1$

= சிக்கலெண்களின் வீச்சுகளின் கூடுதல்.

R எனும் புள்ளி $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$ஐக் குறிக்கிறது.

10. இரு சிக்கலெண்களின் வகுத்தற்பலன் :



படம் - 75

A, P, Q முறையே 1, x_1+iy_1, x_2+iy_2 எண்களைக் குறிக்கட்டும். APஐச் சேர். $\triangle OAP$க்கு வடிவொத்ததாக $\triangle ORQ$ஐ வரை.

$$X\hat{O}R = X\hat{O}Q - Q\hat{O}R$$

$$= X\hat{O}Q - P\hat{O}A$$

$$= \theta_2 - \theta_1$$

$$\frac{OR}{OA} = \frac{OQ}{OP} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$OR = \frac{r_2}{r_1} OA = \frac{r_2}{r_1}$$

$\therefore$ R எனும் புள்ளி $\dfrac{x_2+iy_2}{x_1+iy_1}$-ஐக் குறிக்கிறது.

11. i-யினால் பெருக்குவதின் பலன் :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

$r_2 = 1$, $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ எனக்கொள்வோம்.

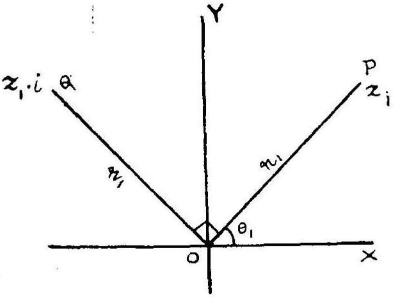
எனவே $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= i$$

$$\therefore \quad z_1 \cdot i = r_1\left\{\cos\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

ஒரு சிக்கலெண்ணை i-யினால் பெருக்க, சிக்கலெண்ணின் மட்டில் மாறுதல் இல்லை. ஆனால் சிக்கலெண்ணின் வீச்சு $\frac{\pi}{2}$ கூடுதலாகிறது.



படம் - 76

படத்தில் $P(z_1)$ஐ குறிக்கிறது, Q, $z_1 \cdot i$ஐக் குறிக்கிறது.

$$OP = OQ = r_1 \qquad XOP = Q_1$$

$$XOQ = Q_1 + \frac{\pi}{2}.$$

மாதிரி 5 : ஆகன் வரைபடத்தில், $2\,|z-2i| = |z-2|$ என்றிருக்கும்படி P ஒரு சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கிறது. P ஒரு வட்டத்தில் அமையும் எனக்காண்பி. வட்டத்தின் மையத்தைக் குறிக்கும் சிக்கலெண் என்ன?

$z = x + iy$ எனக் கொள்வோம்.

$$z - 2i = x + iy - 2i$$

$$= x + i(y-2)$$

$$\therefore \quad |z-2i| = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$z - 2 = x + iy - 2 = (x-2) + iy$$

$$\therefore \quad |z-2| = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

$2\,|z-2i| = |z-2|$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad 2\sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

(அ - து.) $4\{x^2+y^2-4y+4\} = x^2+y^2-4x+4$

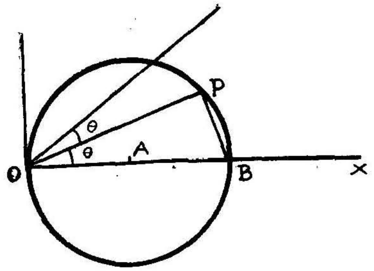
(அ - து.) $3x^2+3y^2+4x-16y+12 = 0.$

zன் இயங்குவரை ஒரு வட்டமாகும். அதாவது $P(z)$ ஒரு வட்டத்தில் அமைகிறது.

வட்டத்தின் மையம் $(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$

வட்டத்தின் மையம் $-\frac{2}{3} + i\frac{8}{3}$ சிக்கலெண்களைக் குறிக்கிறது.

மாதிரி 6 : ஆகன் வரைபடத்தில் (Argand Diagram) B, P, Q புள்ளிகள் முறையே 2, z, z^2ஐக் குறிக்கின்றன. OBஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தை P உண்டுபண்ணினால், Q-ன் இயங்குவரையைக் காண்.



படம் - 77

$P = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ஆனால்

$Q = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

B மெய்-ஆயத்தில் ஒரு புள்ளி

$OB = 2$

$O\hat{P}B = 90^\circ \quad \therefore\ OP = r = OB\cos\theta = 2\cos\theta.$

Oஐ முனையாகவும் OXஐ தொடக்கத்திலுள்ள கோடாகவும் (initial line) கொண்டால் Qன் ஆயத்தொலைகள் (r_1, θ_1) எனக் கொள்வோம்.

$$r_1 = r_2 = 4\cos^2\theta = 4\cos^2\frac{\theta_1}{2} \quad (\theta_1 = 2\theta)$$

$$= 2(1+\cos\theta_1)$$

$\therefore$ Qன் இயங்குவரை $r = 2(1+\cos\theta)$ என்ற இதயவுரு (Cardioide)வாகும்.

பயிற்சிகள் 16

1. $ABCD$ ஒரு சதுரம். A, C முறையே $2+3i$, $4-i$ என்ற சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றது. B, D புள்ளிகள் குறிக்கும் சிக்க லெண்களைக் காண்க. விடை : $1,\ 5+2i$

2. ABC ஆகன் வரைபடத்திலுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணம். A புள்ளி சிக்கலெண் $5+7i$ஐக் குறிக்கிறது. ΔABCயின் திணிவு மையம் (Centroid) சிக்கலெண் $1+4i$ஐக் குறிக்கிறது. B, C புள்ளி கள் குறிக்கும் சிக்கலெண்களைக் கண்டுபிடி.

விடை : $\{(-1-\frac{3}{2}\sqrt{3})+(2\sqrt{3}+\frac{5}{2})i\}$; $\{(-1+\frac{3}{2}\sqrt{3})+(\frac{5}{2}-2\sqrt{3})i\}$

3. ஒரு சதுரத்தின் மையம், $1+3i$, முனைகளில் ஒன்று $4+7i$ ஆனால் மற்ற முனைகள் குறிக்கும் சிக்கலெண்களைக் கண்டுபிடி.

விடை : $-3+6i$; $-2-i$; 5

4. PQR என்பது ஆதியை வெளிவட்ட மையமாகவுடைய சமபக்க முக்கோணம். P எனும் புள்ளி $(2+i)$ எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்குமானால், மற்ற முனைகளின் சிக்கலெண்களைக் கண்டுபிடி.

விடை $\dfrac{-(2+\sqrt{3})+i(2\sqrt{3}-1)}{2}$; $\frac{1}{2}\{(2-\sqrt{3})+i(2\sqrt{3}+1)\}$

5. $|2z-1| = |z-2|$ ஆனால் zன் நியமபாதை ஒரு வட்டம் எனக் காண்பி.

15. டிமாவியரின் தேற்றம்

(De-Moivre's Theorem)

1. டிமாவியரின் தேற்றம் (De-moivre's therorem).

n-ன் எல்லா விகிதமுறு எண் மதிப்பிற்கும் (Rational values), $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$-ன் மதிப்பு அல்லது மதிப்புகளில் ஒன்று $\cos n\theta + i\sin n\theta$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$$

$$= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$\therefore \quad (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ldots\ldots(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$

$$= \cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)$$

வகை (case) 1 : n-ஒரு மிகை முழு எண் எனக்கொள்வோம்.

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \cdots\cdots\theta_n = \theta \text{ ஆனால்}$$

$$\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

வகை 2 : n-ஒரு குறை முழு எண் ஆனால் $n = -m$(m-ஒரு மிகை முழு எண்) எனக் கொள்க.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m}$$

$$= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}$$

$$= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta}$$

(m-ஒரு மிகை முழு எண் ஆதலால் வகை—1 படி)

$$= \frac{1}{\cos m\,\theta + i \sin m\,\theta} \cdot \frac{\cos m\theta - i \sin m\theta}{\cos m\theta - i \sin m\theta}$$

$$= \frac{\cos m\,\theta - i \sin m\,\theta}{\cos^2 m\,\theta + \sin^2 m\,\theta}$$

$$= \cos m\,\theta - i \sin m\,\theta$$

$$= \cos(-m)\theta + i \sin(-m)\theta$$

$$= \cos n\,\theta + i \sin n\,\theta$$

வகை 3: $n = \frac{p}{q}$, p ஒரு முழு எண் என்றும் q ஒரு மிகை முழு எண் என்றும் கொள்வோம்.

q-ஒரு மிகை முழு எண் ஆதலால் வகை 1-ன் படி

$$\left\{ \cos \frac{p}{q}\,\theta + i \sin \frac{p}{q}\,\theta \right\}^q = \cos p\,\theta + i \sin p\,\theta$$

$$= (\cos\theta + i \sin\theta)^p$$

{p ஒரு முழு எண் ஆதலால் வகை 1, 2-ன் படி}

$\therefore$ $(\cos\theta + i \sin\theta)^p$-ன் q-படி மூலங்களில் ஒன்று

$\cos \frac{p}{q}\,\theta + i \sin \frac{p}{q}\,\theta$ ஆகும்.

(அ - து.) $(\cos\theta + i \sin\theta)^{p/q}$ மதிப்புகளில் ஒன்று

$\cos \frac{p}{q}\,\theta + i \sin \frac{p}{q}\,\theta$ ஆகும்.

(அ - து.) $(\cos\theta + i \sin\ )^n$-ன் மதிப்புகளில் ஒன்று

$\cos n\,\theta + i \sin n\,\theta$ ஆகும்.

குறிப்பு 1: $(\cos\theta + i \sin\theta)^{-m} = \cos m\,\theta - i \sin m\,\theta$

m-ஒரு முழு எண்.

குறிப்பு 2: $\frac{1}{(\cos\theta - i \sin\theta)^m} = (\cos\theta + i \sin\theta)^m$

$$= \cos m\,\theta + i \sin m\,\theta.$$

மாதிரி 1: சுருக்குக:

$$\frac{(\cos 3\,\theta - i \sin 3\,\theta)^2 \cdot (\cos 6\,\theta + i \sin 6\,\theta)^4}{(\cos 4\,\theta + i \sin 4\,\theta)^3 \cdot (\cos 2\,\theta - i \sin 2\,\theta)^2}.$$

$$(\cos 3\,\theta - i \sin 3\,\theta)^2 = [(\cos\theta + i \sin\theta)^{-3}]^2$$

$$= (\cos\theta + i \sin\theta)^{-6}$$

$$(\cos 6\,\theta+i\sin 6\,\theta)^4 = \{(\cos\theta+i\sin\theta)^6\}^4 = (\cos\theta+i\sin\theta)^{24}$$

$$(\cos 4\,\theta+i\sin 4\,\theta)^3 = (\cos\theta+i\sin\theta)^{12}$$

$$(\cos 2\,\theta-i\sin 2\,\theta)^2 = (\cos\theta+i\sin\theta)^{-4}$$

$$\therefore \frac{(\cos 3\,\theta-i\sin 3\,\theta)^2\,.\,(\cos 6\,\theta+i\sin 6\,\theta)^4}{(\cos 4\,\theta+i\sin 4\,\theta)^3\,.\,(\cos 2\,\theta-i\sin 2\,\theta)^2}$$

$$= (\cos\theta+i\sin\theta)^{-6+24-12+4}$$

$$= (\cos\theta+i\sin\theta)^{10}$$

$$= \cos 10\,\theta+i\sin 10\,\theta.$$

மாதிரி 2 :

$$\left\{\frac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right\}^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\,\varphi\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\,\varphi\right)$$

என நிரூபி.

$$\frac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi} = \frac{(1+\sin\varphi+i\cos\varphi)}{(1+\sin\varphi-i\cos\varphi)}\cdot\frac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}$$

$$= \frac{(1+\sin\phi)^2+2(1+\sin\varphi)i\cos\varphi-\cos^2\varphi}{(1+\sin\varphi)^2+\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{(1+\sin\phi)^2+2(1+\sin\varphi)i\cos\varphi-(1-\sin^2\varphi)}{2(1+\sin\varphi)}$$

$$= \frac{(1+\sin\varphi)\,\{1+\sin\varphi+2i\cos\varphi-1+\sin\varphi\}}{2(1+\sin\varphi)}$$

$$= \sin\varphi+i\cos\varphi$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

$$\therefore \left\{\frac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right\}^n = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right\}^n$$

$$= \cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\,\varphi\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\,\varphi\right)$$

மாதிரி 3 : $2\cos\theta = x+\frac{1}{x}$, $2\cos\varphi = y+\frac{1}{y}$ ஆனால் $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n}$-ன் ஒரு மதிப்பு $=\cos(m\theta+n\,\theta)$ எனக் காண்பி.

$$2\cos\theta = x + \frac{1}{x} \text{ ஆனால்}$$

$$x = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\therefore\ x^m = (\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta$$

$$\frac{1}{x^m} = (\cos\theta - i\sin\theta)^m = \cos m\theta - i\sin m\theta$$

இதுபோல் $2\cos\varphi = y + \frac{1}{y}$ ஆனால்

$$y^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

$$\frac{1}{y^n} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$$

$$\therefore\ x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = (\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$+ (\cos m\theta - i\sin m\theta)(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$$

$$= \cos(m\theta + n\varphi) + i\sin(m\theta + n\varphi)$$

$$+ \cos(m\theta + n\varphi) - i\sin(m\theta + n\varphi)$$

$$= 2\cos(m\theta + n\varphi).$$

மாதிரி 4: $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$ ஆனால்,

$x^{2n} - 2x^n\cos n\theta + 1 = 0$ எனக் காண்பி. (n ஒரு முழு எண்).

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x\cos\theta + \cos^2\theta = -1 + \cos^2\theta$$

$$(x - \cos\theta)^2 = -\sin^2\theta = i^2\sin^2\theta$$

$$x - \cos\theta = \pm i\sin\theta$$

$$x = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

$$x^n = (\cos\theta \pm i\sin\theta)^n$$

$$= \cos n\theta \pm i\sin n\theta$$

இதேபோல் $\frac{1}{x^n} = (\cos n\theta \mp i\sin n\theta)$

$$\therefore\ x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$$

$$\therefore\ x^{2n} + 1 = 2x^n\cos n\theta$$

(அ-து.) $x^{2n} - 2x^n\cos n\theta + 1 = 0$

மாதிரி 5: $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$

ஆனால் (i) $\Sigma\cos(\alpha+\beta)=0=\Sigma\sin(\alpha+\beta)$

(ii) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma$

எனா நிரூபி.

$x=\cos\alpha+i\sin\alpha$

$y=\cos\beta+i\sin\beta$

$z=\cos\gamma+i\sin\gamma$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=(\cos\alpha-i\sin\alpha)+(\cos\beta-i\sin\beta)+(\cos\gamma-i\sin\gamma)$$

$$=(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)-i(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

$=0$ கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையின்படி

$$\therefore yz+zx+xy=0$$

$$yz+zx+xy=(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\gamma+i\sin\gamma)+(\cos\gamma+i\sin\gamma)(\cos\alpha+i\sin\alpha)+(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=0$$

(அ - து.) $\cos(\beta+\gamma)+i\sin(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+i\sin(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=0$

$$\therefore \left.\begin{aligned}\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)&=0\\ \sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)&=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\text{(i)}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \qquad \therefore \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0$$

$$\therefore \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+2\left[\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right]=0$$

$$\therefore (\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha)+(\cos 2\beta-i\sin 2\beta)+(\cos 2\gamma-i\sin 2\gamma)+2\{\cos(\alpha+\beta)-i\sin(\alpha+\beta)+\cos(\beta+\gamma)-i\sin(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)-i\sin(\gamma+\alpha)\}=0$$

(அ - து.) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+2\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)\}=0$

$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+2\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)\}=0$

∴ சமன்பாடுகள் (i)ஐ உபயோகித்து

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=0$

$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0$ எனக் காட்டலாம்.

பயிற்சிகள் 17-A

1. சுருக்குக :

(i) $\left(\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\sin\theta+i\cos\theta}\right)^4$ விடை : $\cos 8\theta+i\sin 8\theta$

(ii) $\dfrac{1-\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta-i\sin 2\theta}$ விடை : $i\tan\theta$

(iii) $\dfrac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3}{(\sin\beta+i\cos\beta)^4}$ விடை : $\cos(3\alpha+4\beta)+i\sin(3\alpha+4\beta)$

(iv) $\dfrac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^3(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)^4}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^2(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^{-3}}$ விடை : 1

(v) $\dfrac{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^{-4}(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^5}{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^6(\cos 6\theta-i\sin 6\theta)^7}$

விடை : $\cos 20\theta+i\sin 20\theta$

(vi) $(-1-i\sqrt{3})^{3n}+(-1+i\sqrt{3})^{3n}$ விடை : 2^{3n+1}

2. $\left\{\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}}\right\}^{8}$ ன் மதிப்பு என்ன? விடை : -1

3. $z=\cos\theta+i\sin\theta$; $\dfrac{1-z^n}{1-z}=C+i\,S$ என்றால்

$C=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots\ldots+\cos(n-1)\theta$ எனக் காண்பி.

4. $(1+x)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots\ldots+p_nx^n$ என்றால்

(i) $p_0-p_2+p_4-p_6+\ldots\ldots=2^{n/2}\cos\dfrac{n\pi}{4}$

(ii) $p_1-p_3+p_5-p_7+\ldots\ldots=2^{n/2}\sin\dfrac{n\pi}{4}$

(iii) $p_0+p_4+p_8+\ldots\ldots=2^{n-2}+2^{n/2-1}\cos\dfrac{n\pi}{4}$ எனக் காண்பி.

5. $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $y=\cos\beta+i\sin\beta$ என்றால்

$\dfrac{x^m}{y^n}-\dfrac{y^n}{x^m}$ன் ஒரு மதிப்பு $=2i\sin(m\alpha-n\beta)$ என நிரூபி.

6. நிரூபி.

(i) $(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\cos n\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)-i\sin n\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$

(ii) $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n$

$$= 2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}$$

(iii) $(1+i)^n+(1-i)^n = 2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4}$

(iv) $(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$

(v) $(a+ib)^{m/n}+(a-ib)^{m/n}=2(a^2+b^2)^{m/2n}\cos\left(\frac{m}{n}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

m, n மிகை முழு எண்கள். (+ve integers)

7. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ என்றால்

(i) $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma = 3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

(ii) $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma = 3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

(iii) $\Sigma\sin^2\alpha = \Sigma\cos^2\alpha = \frac{3}{2}$

(iv) $\Sigma\cos(2\alpha+\beta+\gamma)=0 = \Sigma\sin(2\alpha+\beta+\gamma)$ எனக்காட்டுக.

8. n ஒருமிகை முழு எண். α, β என்பன $x^2-2x+2=0$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்றால்

$$\alpha^n+\beta^n = 2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$$ என நிரூபி.

9. α, β என்பன $t^2-2t+2=0$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள், $(x+1)\tan\varphi=1$ என்றால் $\frac{(x+\alpha)^n-(x+\beta)^n}{\alpha-\beta}=\frac{\sin^n\varphi}{\sin^n\varphi}$ என நிரூபி.

(n ஒரு முழு எண்)

10. $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\ldots\ldots(a_n+ib_n) = A+iB$ ஆனால்

(i) $\tan^{-1}\frac{b_1}{a_1}+\tan^{-1}\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = n\pi+\tan^{-1}\frac{B}{A}$

(ii) $(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)+\ldots\ldots+(a_n^2+b_n^2) = A^2+B^2$ எனக் காட்டுக.

11. $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $b=\cos\beta+i\sin\beta$ என்றால்

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2i}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\left(ab+\frac{1}{ab}\right)$$ என நிரூபி.

12. $a=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$; $b=\cos 2\beta+i\sin 2\beta$,

$c=\cos 2\gamma+i\sin 2\gamma$ ஆனால்,

$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b) = 0$$

என்ற சர்வசமத்தை (identity)ப் பயன்படுத்தி

$\Sigma\cos(2\alpha+\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma) = 0$ என நிரூபி.

2. $(a+ib)^{1/q}$-ன் q மதிப்புகள்

$(a+ib)$ என்ற சிக்கலெண்ணின் மட்டு r என்றும், தலையாய வீச்சு θ என்றும் கொள்வோம்.

$$(a+ib) = r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$= r[\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)] \quad k \text{ ஒரு முழு எண்}$$

$$\therefore (a+ib)^{1/q} = r^{1/q}[\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)]^{1/q} \ldots\ldots(A)$$

$r^{1/q}$, r-ன் நேர் q-படி மூலமாகும்.

டிமாவியரின் தேற்றப்படி A-ன் மதிப்புகளில் ஒன்று

$$r^{1/q}.\left\{\cos\frac{\theta+2k\pi}{q}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{q}\right\} \text{ ஆகும்.}$$

k-க்கு 0, 1, 2, 3,......$(q-1)$ மதிப்புகளை வரிசையாகக் கொடுக்க, $(a+ib)^{1/q}$-ன் பின்வரும் q மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

$$r^{1/q}\left\{\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right\}$$

$$r^{1/q}\left\{\cos\frac{\theta+2\pi}{q}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{q}\right\}$$

... ...

... ...

$$r^{1/q}\left\{\cos\frac{\theta+(q-2)\pi}{q}+i\sin\frac{\theta+(q-2)\pi}{q}\right\}$$

$$r^{1/q}\left\{\cos\frac{\theta+(q-1)\pi}{q}+i\sin\frac{\theta+(q-1)\pi}{q}\right\}$$

மேலும் k-க்கு q, $q+1$,......மதிப்புகளைக் கொடுத்தால் முன் கொடுத்த மதிப்புகளே திரும்பவும் கிடைக்கும்.

$\therefore$ $(a+ib)$-ன் q, q-படி மூலங்கள்

$$r^{1/q}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{q}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{q}\right]$$

$$k=0, 1, 2,\ldots\ldots(q-1)$$

மாதிரி 6 : $(-\sqrt{3}+i)^{1/5}$-ன் மதிப்புகள் என்ன? வரைபட முறைப்படி குறிக்கவும்.

$-\sqrt{3}+i = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ எனக் கொள்வோம்.

$$r\cos\theta = \sqrt{3}, \quad r\sin\theta=1$$

$$r = 2, \quad \theta=150°$$

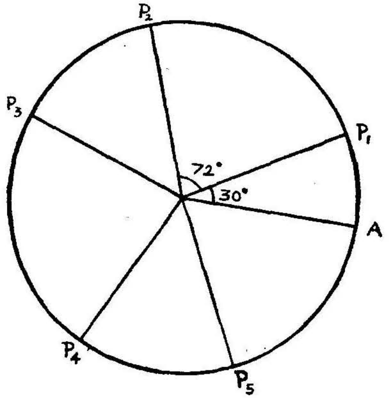
$$(-\sqrt{3}+i) = 2\{\cos 150°+i\sin 150°\}$$

$$= 2\{\cos(2k\pi+150°)+i\sin(2k\pi+150°)\}$$

$$(-\sqrt{3}+i)^{1/5} = 2^{1/5}\{\cos(72°.k+30°)+i\sin(72°.k+30)\}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4......$$

ஆதியை மையமாகவும் $2^{1/5}$-ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரை.



படம்-78

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 புள்ளிகள் $(-\sqrt{3}+i)^{1/5}$-ன் 5 மதிப்புகளைக் குறிக்கின்றன. 5 புள்ளிகளும் $2^{1/5}$-ஐ ஆரமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் வரையப்படும் ஒரு ஒழுங்கான ஐங்கோணத்தை உண்டுபண்ணுகிறது.

மாதிரி 7 : $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{3/4}$-ன் நான்கு மதிப்புகளின் தொடர் பெருக்கம் ஒன்று என நிரூபி.

$$x = \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{3/4} \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$x^4 = \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{3} = \cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$$\therefore \quad x^4+1 = 0$$

இந்த சமன்பாட்டின் x_1, x_2, x_3, x_4 என்ற நான்கு மூலங்கள் $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{3/4}$-ன் நான்கு மதிப்புகளாகும்.

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{\text{சார்பற்ற எண்}}{x_4\text{-ன் கெழு}} = 1.$$

மாதிரி 8 : $x^7-x^4+x^3-1=0$ சமன்பாட்டை விடுவி.

$$x^7-x^4+x^3-1 = 0$$

$$(x^4+1)(x^3-1) = 0$$

$\therefore\quad x^4 = -1$ அல்லது $x^3=1$

$$x^4 = -1=\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi$$

$$x = \{\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi\}^{1/4}$$

$$= \cos\frac{(2k+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4} \qquad k=0,1,2,3$$

$$x^3 = 1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$$

$$x = (\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)^{1/3}$$

$$= \cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3} \qquad k=0,1,2$$

மாதிரி 9 : n - ஒரு மிகை முழுஎண் (+ve integer) ஆனால் 1-ன் எல்லா n-படி மூலங்களையும் கண்டுபிடி. அவைகள் ஒரு பெருக்குத்தொடரை (Geometric Progression) உண்டுபண்ணுகிறது எனக் காண்பி. z, 1-ன் n-படி மூலங்களில் ஒன்றைக் குறித்தால், $(1+z)^n$ மெய் என்று நிரூபி.

$$z^n = 1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$$

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$k = 0, 1, 2\ldots\ldots(n-1)$$

$\therefore$ 1-ன் n-படி மூலங்கள்

$$z_1 = 1$$

$z_2 = \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=w$ என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

$z_3 = \cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}=w^2$ {டிமாவியரின் தேற்றம்படி}

$$z_4 = \cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}=w^3$$

... ...

$z_n = w^{n-1}$

$\therefore$ 1-ன் n-படி மூலங்கள்

$1;\ w, w^2, w^3, \ldots\ldots w^{n-1}$ ஆகும்.

இவை ஒரு பெருக்குத்தொடரை உண்டுபண்ணுகிறது.

$$1+z = 1+\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$= 2\cos^2\frac{k\pi}{n}+2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}$$

$$= 2\cos\frac{k\pi}{n}\left\{\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right\}$$

$$(1+z)^n = 2^n\cos^n\frac{k\pi}{n}\left\{\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right\}^n$$

$$= 2^n\cos^n\frac{k\pi}{n}\ \{\cos k\pi+i\sin k\pi\}$$

$$= 2^n\cos^n\frac{k\pi}{n}\cdot(-1)^k$$ - மெய் கணியம் (Real quantity)

மாதிரி 10: $\alpha = \cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ ஆனால் $\alpha+\alpha^2+\alpha^4$, $\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6$, $x^2+x+2=0$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என நிரூபி.

$\alpha^7 = \cos 2\pi+i\sin 2\pi = 1$

$\alpha^7-1 = 0$

$(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1) = 0$

$\alpha\neq 1,\ \therefore\ \alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 = 0$

$\therefore$ மூலங்களின் கூடுதல் (Sum of the roots)

$= \alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6$

$= -1$

மூலங்களின் பெருக்கம் (Product of the roots)

$= (\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)$

$= \alpha(1+\alpha+\alpha^3)\,\alpha^3(1+\alpha^2+\alpha^3)$

$= \alpha^4(1+\alpha+\alpha^3+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^5+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^6)$

$= \alpha^4+\alpha^5+\alpha^6+3\alpha^7+\alpha^8+\alpha^9+\alpha^{10}$

$= \alpha^4+\alpha^5+\alpha^6+3+\alpha+\alpha^2+\alpha^3 \qquad (\because\ \alpha^7 = 1)$

$= 3+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6$

$= 3-1$

$= 2$ தேவையான சமன்பாடு $x^2+x+2 = 0$.

மாதிரி 11 : $x^{12}-1=0$-ஐ விடுவித்து அதன் எம்மூலங்கள் $x^4+x^2+1=0$-க்கு மூலங்கள் என்று கண்டுபிடி.

$$x^{12}=1 = \cos 2k\pm i \sin 2k\pi$$

$$= \left(\cos\frac{2k\pi}{12}\pm i\sin\frac{2k\pi}{12}\right)^{12}$$

$$x = \cos\frac{2k\pi}{12}\pm i\sin\frac{2k\pi}{12}$$

$$= \cos\frac{k\pi}{6}\pm i\sin\frac{k\pi}{6} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\dots 6)$$

$x^{12}-1 = 0$-வின் மூலங்கள்

$$1,\ \cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6},\ \cos\frac{2\pi}{6}\pm i\sin\frac{2\pi}{6},\ \cos\frac{3\pi}{6}\pm i\sin\frac{3\pi}{6},$$
$$\cos\frac{4\pi}{6}\pm i\sin\frac{4\pi}{6},\ \cos\frac{5\pi}{6}\pm i\sin\frac{5\pi}{6},\ \cos\frac{6\pi}{6}\pm i\sin\frac{6\pi}{6}.$$

(அ - து.) $1,\ \cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6},\ \cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3},$

$$\pm i,\ \cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3},\ \cos\frac{5\pi}{6}\pm i\sin\frac{5\pi}{6},\ -1$$

$x^6-1=0\ ;\ x^6-1=(x^2-1)\ (x^4+x^2+1)$

$$x^6=1= (\cos 2r\pi\pm i\sin 2r\pi)$$

$$= \left(\cos\frac{2r\pi}{6}\pm i\sin\frac{2r\pi}{6}\right)^6$$

$$x = \cos\frac{r\pi}{3}\pm i\sin\frac{r\pi}{3},\ r=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$x^6-1=0$-வின் மூலங்கள்

$$1,\ \cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}-1.$$

எனவே $x^4+x^2+1=0$-வின் மூலங்கள்

$\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}$ ஆகும்.

பயிற்சிகள் 17–B

1. கீழ்கண்டவற்றின் எல்லா மதிப்புகளையும் கண்டுபிடி.

(i) $(1+i\sqrt{3})^{1/4}$ விடை : $2^{1/4}\ \text{cis}\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right),$

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ ($\text{cis}\ \theta=\cos\theta+i\sin\theta$)

(ii) $(1+i)^{1/3}$ விடை : $2^{1/6}\ \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right),\ k=0,1,2$

(iii) $(\sqrt{3}+i)^{1/5}$ விடை : $2^{1/5}\ \text{cis}\ \frac{(12k+1)\pi}{30},\ k=0,1,...4$

(iv) $(1+i\sqrt{3})^{1/6}$ விடை : $2^{1/6}\ \text{cis}\ \frac{(6k+1)\pi}{18},\ k=0,1,...5$

(v) $(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)^{1/6}$ விடை : $\text{cis}\left(\frac{n\pi}{3}+3^\circ\right)$

$n=0,1,...5$

2. $(1+i)$ என்ற சிக்கலெண்ணின் ஐந்தாம்படி மூலத்தைக் கண்டு பிடித்து, அவை ஐந்தின் பெருக்குத்தொகை $(1+i)$-க்குச் சமம் எனக் காண்பி. விடை : $2^{1/10}\ \text{cis}\ \frac{(8k+1)\pi}{20},\ k=0,1,...4$

3. $(-1)^{1/5}$-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் கண்டுபிடி. அவைகளின் பெருக்குத்தொகை என்ன ?

விடை : $\text{cis}\ \frac{(2k+1)\pi}{5},\ k=0,1,...4;\ -1$

4. ஒன்றின் கற்பனை மூன்றும்படி மூலம் w ஆனால்

(i) $1+w+w^2=0$

(ii) $\frac{1}{1+2w}-\frac{1}{1+w}+\frac{1}{2+w}=0$

(iii) $(z_1+wz_2+w^2z_3)(z_1+w^2z_2+wz_3)$
$= z_1^2+z^2+z_3^2-z_2z_3-z_3z_1-z_1z_2$ எனக் காட்டுக.

5. கீழ்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர் :

(i) $x^6-4x^3+8=0$

விடை : $x=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)\pm i\sin\left(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$n=0,1,2$

(ii) $x^{12}-x^6+6=0$

விடை : $6^{1/2}\ \text{cis}\ \frac{\alpha+2\pi n}{6};\ \alpha=\tan^{-1}\sqrt{23},\ n=0,1,...5$

$6^{1/2}\ \text{cis}\ \frac{\beta+2n\pi}{6};\ \beta=\tan^{-1}(-\sqrt{23}),$

$n=0,1,2,...5$

(iii) $x^{11}-x^7+x^4-1=0$ விடை: $\text{cis}\,\frac{k\pi}{2}$, $k=0, 1, 2, 3$

$\text{cis}\,(2k+1)\frac{\pi}{7}$, $k=0, 1, 2, \ldots 6$

(iv) $x^9+x^5+x^4+1=0$ விடை: $\text{cis}\,\frac{(2n+1)\pi}{4}$ $n=0, 1, 2, 3$

$\text{cis}\,\frac{(2n+1)\pi}{5}$ $n=0, 1, 2, 3, 4$

(v) $(x+1)^n=x^n$

விடை: $-\frac{1}{2}\left\{1+i\cot\frac{\pi k}{n}\right\}$: $k=0, 1, 2, \ldots n-1$

6. $\alpha=\cos\frac{2\pi}{13}+i\sin\frac{2\pi}{13}$ ஆனால் $x^2+x-3=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^9+\alpha^{10}+\alpha^{12}$, $\alpha^2+\alpha^5+\alpha^6+\alpha^7+\alpha+\alpha^{11}$ என் நிருபி.

7. $\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ஆனால் $\alpha+\alpha^4$, $\alpha^2+\alpha^3$ என்பவற்றை மூலங்களாக உடைய சமன்பாடு $x^2+x-1=0$ எனக் காண்பி.

8. $w=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ ஆனால், ஆகன் வரைபடத்தில் $a+b$, $a+bw$, $a+bw^2$ என்ற புள்ளிகள் 'a'-ஐ மையமாகவும் 'b'-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தினுள் வரையப்படும் சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகும் என நிருபி.

16. விரிவுகள்
(Expansions)

1. n-ஒரு மிகை முழு எண் ஆனால் $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ ஆகிய வற்றின் விரிவுகள்.

$$(\cos n\theta + i\sin n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (c+is)^n$$

$$= C^n + nC_1c^{n-1}(is) + nC_2c^{n-2}(is)^2 + nC_3c^{n-3}(is)^3 + \dots + (is)^n$$

$$= C^n + inC_1c^{n-1}s - nC_2c^{n-2}s^2 - inC^3c^{n-3}s^3 + \dots\dots + nC_ni^ns^n$$

எனவே மெய்ப்பகுதிகளைச் சமன்படுத்தினால்

$$\cos n\theta = C^n - nC_2c^{n-2}s^2 + nC_4c^{n-4}s^4 - \dots\dots$$

$$= \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \dots\dots$$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன்படுத்தினால்

$$\sin n\theta = nC_1c^{n-1}s - nC_3c^{n-3}s^3 + \dots\dots$$

$$= n\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \dots$$

என கிடைக்கப் பெறுகிறோம்.

n ஒரு மிகை முழு எண் ஆனால்

$$\sin n\theta = nC_1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - nC_3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \dots\dots$$

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - nC_2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + nC_4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta -$$

$$\therefore\ \tan n\theta = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}$$

$$= \frac{nC_1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - nC_3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \dots\dots}{\cos^n\theta - nC_2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + nC_4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \dots}$$

$$= \frac{nC_1\tan\theta - nC_3\tan\theta + \dots\dots}{1 - nC_2\tan^2\theta + nC_4\tan^4\theta - \dots}$$

2. tan $(A+B+C+...)$ ன் விரிவு.

$\cos A+i\sin A=\cos A\,(1+i\tan A)$

$\cos B+i\sin B=\cos B\,(1+i\tan B)$

... ...

... ...

$\therefore\ (\cos A+i\sin A)(\cos B+i\sin B)......$

$=\cos A\cos B......\{(1+i\tan A)(1+i\tan B)......\}$

(ie) $\cos(A+B+C+...)+i\sin(A+B+C+...)$

$=\cos A\cos B...[1+iS_1-S_2-iS_3+...]$

Sr என்பது தடவைக்கு r வீதம் tan A, tan B, tan C...... பெருக்கத்தின் கூடுதல்.

இருபக்கங்களிலும் மெய் கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமன்படுத்த

$$\cos(A+B+C+...)=\cos A\cos B\cos C...(1-S_2+S_4-...)$$

$$\sin(A+B+C+...)=\cos A\cos B\cos C...(S_1-S_3+S_5-...)$$

$$\therefore\ \tan(A+B+C-...)=\frac{S_1-S_3+S_5-...}{1-S_2+S_4-...}$$

துணை முடிபு : $A=B=C...=\theta$ ஆனால்

$$\tan n\theta=\frac{S_1-S_3+S_5-...}{1-S_2+S_4-...}$$

$$S_1=n\tan\theta,\ S_2=nC_2\tan^2\theta,\ S_3=nC_3\tan^3\theta...,$$

$$\therefore\ \tan n\theta=\frac{nC_1\tan\theta-nC_3\tan^3\theta+...}{1-nC_2\tan^2\theta+nC_4\tan^4\theta-...}$$

மாதிரி 1 : $\cos 7\theta,\ \dfrac{\sin 7\theta}{\sin\theta}$ ஐ $\cos\theta$ வின் அடுக்குகளாக விரித்தெழுதுக.

$$\cos 7\theta+i\sin 7\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^7$$
$$=\cos^7\theta+7C_1\cos^6\theta\, i\sin\theta+7C_2\cos^5\theta\,(i\sin\theta)^2+7C_3\cos^4\theta\,(i\sin\theta)^3+...+(i\sin\theta)^7$$

மெய் கற்பனை பகுதிகளைச் சமன்படுத்த

$$\cos 7\theta=\cos^7\theta-7C_2\cos^5\theta\sin^2\theta+7C_4\cos^3\theta\sin^4\theta-7C_6\cos\theta\sin^6\theta$$
$$=\cos^7\theta-21\cos^5\theta(1-\cos^2\theta)+35\cos^3\theta(1-\cos^2\theta)^2-7\cos\theta(1-\cos^2\theta)^3$$
$$=64\cos^7\theta-112\cos^5\theta+56\cos^3\theta-7\cos\theta$$

$$\sin 7\theta = 7C_1 \cos^6\theta \sin\theta - 7C_3 \cos^4\theta \sin^3\theta + \ldots\ldots - \sin^7\theta$$

$$\frac{\sin 7\theta}{\sin\theta} = 7\cos^6\theta - 35\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta) + 21\cos^2\theta\,(1-\cos^2\theta)^2 - (1-\cos^2\theta)^3$$

$$= 64\cos^6\theta - 80\cos^4\theta + 24\cos^2\theta - 1.$$

மாதிரி 2 : $\cos 5\theta$ ஐ $\cos\theta$ வின் அடுக்குகளாக விரித்து $(1+\cos 10\theta) = 2[16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta]^2$ எனக் காட்டுக.

$$(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = (C + is)^5$$

$$= c^5 + 5C_1c^4\, is + 5C_2c^3(is)^2 + 5C_3c^2(is)^3 + 5C_4c(is)^4 + (is)^5$$

மெய் பகுதிகளைச் சமன்படுத்த,

$$\cos 5\theta = c^5 + 5C_2c^3s^2 + 5C_4cs^4$$

$$= c^5 - 10c^3(1-c^2) + 5c(1-c^2)^2$$

$$= c^5 - 10c^3 + 10c^5 + 5c - 10^3c + 5c^5$$

$$= 16c^5 - 20c^3 + 5c$$

$$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

$$1 + \cos 10\theta = 2\cos^2 5\theta = 2\{16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta\}^2$$

மாதிரி 3 : $x^3 + px^2 + qx + p = 0$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, γ ஆனால் $\tan^{-1}\alpha + \tan^{-1}\beta + \tan^{-1}\gamma = n\pi$ ஆரையன்கள் (Radians) என நிரூபி $(q \neq 1)$.

α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + p = 0$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆனதால்

$$\alpha + \beta + \gamma = -p \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q \quad \ldots\ldots(2)$$

$$\alpha\beta\gamma = -p \quad \ldots\ldots(3)$$

$\tan^{-1}\alpha$, $\tan^{-1}\beta$, $\tan^{-1}\gamma$ என்பன முறையே, x_1, x_2, x_3 க்குச் சமம் எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \alpha = \tan x_1,\ \beta = \tan x_2,\ \gamma = \tan x_3$$

சமன்பாடுகள், (1), (2), (3) லிருந்து

$$S_1 = \tan x_1 + \tan x_2 + \tan x_3 = -p$$

$$S_2 = \tan x_1 \tan x_2 + \tan x_2 \tan x_3 + \tan x_3 \tan x_1 = q$$

$$S_3 = \tan x_1 \tan x_2 \tan x_3 = -p$$

$$\therefore \quad \tan(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2} = \frac{-p+p}{1-q}$$

$q \neq 1$ ஆனால் $\tan(x_1 + x_2 + x_3) = 0$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_3 = n\pi$$

அதாவது $\tan^{-1}\alpha + \tan^{-1}\beta + \tan^{-1}\gamma = n\pi.$

3. $x = \cos\theta + i\sin\theta$ ஆனால்

$$\frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta; \qquad x - \frac{1}{x} = 2i\sin\theta;$$

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta; \qquad x^n - \frac{1}{x^n} = 2i\sin n\theta.$$

இந்த முடிவுகளை உபயோகித்து, $\cos^n\theta$, $\sin^n\theta$-வை θ ன் மடங்குகளான sine, cosine தொடர்களாக விரிவுபடுத்தலாம்.

$$(2\cos\theta)^n = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n$$

$$= x^n + nC_1 x^{n-1}\frac{1}{x} + nC_2 x^{n-2}\frac{1}{x_2} + \ldots\ldots$$

$$+ nC_{n-1}x\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n}$$

$$= \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + nC_1\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

$$+ nC^2\left(x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}\right) + \ldots\ldots$$

$$= 2\cos n\theta + nC_1\, 2\cos(n-2)\theta + nC_2\, 2\cos(n-4)\theta + \ldots\ldots$$

$$2^{n-1}\cos^n\theta = \cos n\theta + nC_1\cos(n-2)\theta + nC_2\cos(n-4)\theta + \ldots\ldots$$

மாதிரி 4 : நிரூபி :

$$2^7\sin^8\theta = \cos 8\theta - 8\cos 6\theta + 28\cos 4\theta - 56\cos 2\theta + 35$$

$x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனக் கொள்வோம்.

$$(2i\sin\theta)^8 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^8$$

$$= \left(x^8 + \frac{1}{x^8}\right) - 8\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) + 28\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$$

$$-56\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 70$$

$$2^8\sin^8\theta = 2\cos 8\theta - 16\cos 6\theta + 56\cos 4\theta - 112\cos 2\theta + 70$$

$$\therefore \quad 2^7\sin^8\theta = \cos 8\theta - 8\cos 6\theta + 28\cos 4\theta - 56\cos 2\theta + 35.$$

மாதிரி 5 : நிரூபி :

$$2^5\cos^6\theta = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10$$

$x = \cos\theta + i\sin\theta$ எனக் கொள்வோம்.

$$(2\cos\theta)^6 = (x+\tfrac{1}{x})^6$$

$$= \left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)+6C_1\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+6C_2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6C_3$$

$$= 2\cos 6\theta+6C_1\,(2\cos 4\theta)+6C_2\,(2\cos 2\theta)+6C_3$$

$$2^5\cos^6\theta = \cos 6\theta+6\cos 4\theta+15\cos 2\theta+10$$

மாதிரி 6 : நிரூபி :

$$\sin^3\theta\cos^5\theta = \frac{1}{2^7}(\sin 8\theta+2\sin 6\theta-2\sin 4\theta-6\sin 2\theta)$$

$$(2i\sin\theta)^3\,(2\cos\theta)^5 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$$

$$= \left(x-\frac{1}{x}\right)^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x^6-3x^2+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^6}\right)\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(x^8-\frac{1}{x^8}\right)+2\left(x^6-\frac{1}{x^6}\right)$$

$$-2\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)-6\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= (2i\sin 8\theta)+2(2i\sin 6\theta)-$$
$$2(2i\sin 4\theta)-6(2i\sin 2\theta)$$

(அ - து.) $2^3\,(-i)\sin^3\theta\;2^5\cos^5\theta = 2i\{\sin 8\theta+2\sin 6\theta-$
$2\sin 4\theta-6\sin 2\theta\}.$

$$\sin^3\theta\cos^5\theta = -\frac{1}{2^7}\{\sin 8\theta+2\sin 6\theta-2\sin 4\theta-6\sin 2\theta\}.$$

மாதிரி 7: நிரூபி:

$$\sin^4\theta\cos^2\theta = \frac{1}{2^5}(\cos 6\theta-2\cos 4\theta-\cos 2\theta+2)$$

$$(2i\sin\theta)^4\cdot(2\cos\theta)^2 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x^4-2+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right) - \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4$$

$$= 2\cos 6\theta-2\,(2\cos 4\theta)-2\cos 2\theta+4$$

$2^5 \sin^4\theta \cos^2\theta = \cos 6\theta-2\cos 4\theta-\cos 2\theta+2.$

$\therefore \sin^4\theta\cos^2\theta = \frac{1}{32}(\cos 6\theta-2\cos 4\theta-\cos 2\theta+2)$

4. *sin θ, cos θ, tan θ* ஆகியவைகளின் விரிவுகள்.

$\cos n\alpha = \cos^n\alpha-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha+\ldots\ldots$ ஆகும்.

இதில் $n\alpha=\theta$ எனக் கொண்டால் $\alpha=\frac{\theta}{n}$ ஆகிறது.

$$\cos\theta = \cos^n\frac{\theta}{n}-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\frac{\theta}{n}\cdot\sin^2\frac{\theta}{n}+\ldots\ldots$$

$$= \cos^n\frac{\theta}{n}-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\theta^2}{n^2}\cos^{n-2}\frac{\theta}{n}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\theta}{n}}{\frac{\theta}{n}}\right)^2+\ldots\ldots$$

$$= \cos^n\left(\frac{\theta}{n}\right)\cdot\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}\cdot\theta^2\cdot\cos^{n-2}\frac{\theta}{n}\cdot\left\{\frac{\sin\frac{\theta}{n}}{\frac{\theta}{n}}\right\}^2+\ldots$$

$n\to\infty$ ஆனால் $\frac{\theta}{n}\to 0,\ \frac{\sin\frac{\theta}{n}}{\frac{\theta}{n}}\to 1.$

(i) $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\ \frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = 1,$ (ii) $\underset{n\to\alpha}{\text{Lt}}\ \cos\frac{x}{n} = 1,$

(iii) $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^n = 1$ (iv) $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\ \cos^n\frac{x}{n} = 1.$

$$\therefore \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{\angle 2} + \frac{\theta^4}{\angle 4} - \cdots\cdots\cdots$$

இதுபோல் $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{\angle 3} + \frac{\theta^5}{\angle 5} - \cdots\cdots\cdots$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\text{ccs}\,\theta}$$

$$= \left\{\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \cdots\cdots\right\} \Big/ \left\{1 - \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + \frac{\theta^6}{720} - \right)\right\}$$

$$= \left[\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \cdots\right]\left[1 + \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24}\cdots\right) + \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + \cdots\right)^2 + \cdots\cdots\right]$$

$$= \left[\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \cdots\right]\left[1 + \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + \frac{\theta^4}{4}\cdots\cdots\right]$$

$$= \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2}{15}\theta^5 + \cdots\cdots \quad \left\{ |\theta| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

மாதிரி 8 : $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{5045}{5046}$ ஆனால், தோராயமாக $\theta = 1°\,58'$ எனக் காண்பி.

$\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ ($\theta \to 0$ ஆனால்) θ-ஆரையனில் அளக்கப்படுகிறது.

$\frac{5045}{5046} = 1$ (தோராயமாக) ஆனதால், θ மிகச் சிறியது ஆகும்.

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\theta - \frac{\theta^3}{\angle 3} + \frac{\theta^5}{\angle 5} - \cdots\cdots}{\theta}$$

$= 1 - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{120}$ தோராயமாக.

$$\therefore 1 - \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^4}{120} = \frac{5045}{5046}$$

$$\therefore \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^4}{120} = 1 - \frac{5045}{5046} = \frac{1}{5046}$$

$\frac{\theta^2}{6} = \frac{1}{5046}$ (முதல்படி தோராயமாக. (to the first degree of approximation).

$$\therefore \theta^2 = \frac{6}{5046} = \frac{1}{841}$$

$\therefore \theta = \frac{1}{29}$ ஆரையன்.

$= \frac{1}{29} \times 57°\,17'\,44{\cdot}8''$

$= 1°\,58'$ தோராயமாக.

மாதிரி 9 : $\underset{\theta\to 0}{\text{Lt}} \frac{\tan 2\theta - 2\sin\theta}{\theta^3} = 3$ எனக் காண்பி.

$$\tan 2\theta - 2\sin\theta = 2\theta + \frac{(2\theta)^3}{3} + \frac{2}{15}(2\theta)^5 + \ldots\ldots$$
$$-2\left\{\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \ldots\ldots\ldots\right\}$$
$$= 3\theta^3 + (\quad)\theta^5 + \ldots\ldots$$

$$\therefore \underset{\theta\to 0}{\text{Lt}} \frac{\tan 2\theta - 2\sin\theta}{\theta^3} = \underset{\theta\to 0}{\text{Lt}} \{3 + (\quad)\theta^2 + \ldots\ldots$$
$$= 3.$$

மாதிரி 10 : $\underset{\theta\to 0}{\text{Lt}} \frac{\theta(a+b\cos\theta) - c\sin\theta}{\theta^5} = 1$ ஆனால்

a, b, c ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

$$\theta(a+b\cos\theta) - c\sin\theta = \theta\left\{a + b\left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \ldots\right)\right\}$$
$$-c\left\{\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \ldots\right\}$$
$$= \theta(a+b-c) + \theta^3\left(-\frac{b}{2} + \frac{c}{6}\right) + \theta^5\left(\frac{b}{24} - \frac{c}{120}\right) + \ldots\ldots$$

$\underset{\theta\to 0}{\text{Lt}} \frac{\theta(a+b\cos\theta) - c\sin\theta}{\theta^5} = 1$ஆக இருக்கவேண்டுமானால்

$a+b-c = 0, \frac{c}{6} - \frac{b}{2} = 0, \frac{b}{24} - \frac{c}{120} = 1.$ சமன்பாடுகளை விடுவிக்க,
$a = 120, b = 60, c = 180$ ஆகும்.

பயிற்சிகள் 18

1. நிரூபிக்க :

(i) $\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta$

(ii) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 2\theta\cos^3\theta + 5\cos\theta$

(iii) $\cos 6\theta = 1 - 18\sin^2\theta + 48\sin^4\theta - 32\sin^6\theta$

(iv) $2(1+\cos 8\theta) = (x^4 - 4x^2 + 2)^2$. இங்கு $x = 2\cos\theta$.

2. கீழ்கண்டவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $2^6\cos^7\theta = \cos 7\theta + 7\cos 5\theta + 21\cos 3\theta + 35\cos\theta$

(ii) $2^7\sin^8\theta = \cos 8\theta - 8\cos 6\theta + 28\cos 4\theta - 56\cos 2\theta + 35$

(iii) $2^7 \cos^8\theta = \cos 8\theta + 8\cos 6\theta + 28\cos 4\theta + 56\cos 2\theta + 35$

(iv) $\cos^3\theta \sin^4\theta = \frac{1}{64}(\cos 7\theta - \cos 5\theta - 3\cos 3\theta + 3\cos\theta)$

(v) $2^9 \cos^4\theta \sin^6\theta = -\cos 10\theta + 2\cos 8\theta + 3\cos 6\theta - 8\cos 4\theta - 2\cos 2\theta + 12$

(vi) $2^{10} \sin^5\theta \cos^6\theta = \sin 11\theta + \sin 9\theta - 5(\sin 7\theta + \sin 5\theta) + 10(\sin 3\theta + \sin\theta)$

3. $\dfrac{\sin\theta}{\theta} = \dfrac{863}{864}$ ஆனால் θ-வின் மதிப்பைக் கிட்டிய கலை (minute) வரை கண்டுபிடி.

4. $\dfrac{\sin\theta}{\theta} = \dfrac{2165}{2166}$ ஆனால் $\theta = 3^\circ$ (தோராயமாக) எனக்காண்பி.

5. $\dfrac{\tan\theta}{\theta} = \dfrac{2524}{2523}$ ஆனால் $\theta = 2^\circ$ (தோராயமாக நிரூபி.)

6. பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகள் யாவை ?

(i) $\underset{\theta\to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{5\sin\theta - \sin 5\theta}{\theta(\cos\theta - \cos 5\theta)}$ விடை : $\frac{5}{3}$

(ii) $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\tan x + \sec x - 1}{\tan x - \sec x + 1}$ விடை : 1

(iii) $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x\sin^2 x}$ விடை : 1

(iv) $\underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\sin x + \cos 2x}{\cos^2 x}$ விடை : $\frac{3}{2}$

(v) $\underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\mathrm{Lt}} (\sin x)^{\tan x}$ விடை : 1

(vi) $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{e^x - 1 + \log_e(1-x)}{x^3}$ விடை : $-\frac{1}{6}$

7. $\underset{\theta\to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{a - \theta\sin\theta - b\cos\theta}{\theta^4} = \frac{1}{12}$ ஆனால் a, b-ன் மதிப்புகளைக் காண்.

விடை : $a = 2 = b$

8. x-ன் ஏறுகின்ற படிகளாக அமையும் $(\cos x+\sin 2x)^2$-ன் விரிவில் x^6-ன் கெழுவைக் கண்டுபிடி. விடை : $\dfrac{4^6-2^6}{2\,.\,(6\,!)}$

9. x மிகச் சிறியது ஆனால்

$\log \sin x = \log x - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{180}$ (தோராயமாக) என நிரூபி.

10. தோராயமாகத் தீர் : (i) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)=0{\cdot}49$

விடை : $\theta=40'$

(ii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=1{\cdot}001$

விடை : $\frac{1}{2001}$ ஆரையன்

17. அதிபர வளைவுச் சார்புகள்

(Hyperbolic Functions)

1. அதிபர வளைவுச் சார்புகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப் படுகின்றன: (u — மெய் அல்லது சிக்கல் எண் ஆக இருக்கலாம்.)

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}; \quad \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

$$\text{sech}\, u = \frac{1}{\cosh u}; \quad \text{cosech}\, u = \frac{1}{\sinh u}$$

$$\coth u = \frac{1}{\tanh u}$$

2. சில முக்கிய முடிபுகள் (Some Important Results):

(i) $\cosh(-u) = \dfrac{e^{-u} + e^u}{2} = \cosh u$

$\sinh(-u) = \dfrac{e^{-u} - e^u}{2} = -\sinh u$

$\cosh u$ — இரட்டை சார்பு

$\sinh u$ — ஒற்றைச் சார்பு

(ii) $\cosh^2 u - \sinh^2 u = \frac{1}{4}\{(e^u + e^{-u})^2 - (e^u - e^{-u})^2\}$

$= \frac{1}{4}\, 4e^u . e^{-u} = 1$

(iii) $\cosh^2 u + \sinh^2 u = \frac{1}{4}\{(e^u + e^{-u})^2 + (e^u - e^{-u})^2\}$

$= \frac{1}{4}(2e^{2u} + 2e^{-2u})$

$= \dfrac{e^{2u} + e^{-2u}}{2} = \cosh 2u$

$$\therefore \cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u$$

$$= 1 + 2\sinh^2 u = 2\cosh^3 u - 1$$

(அ - து.) $$\cosh^2 u = \frac{\cosh 2u + 1}{2}$$

$$\sinh^2 u = \frac{\cosh 2u - 1}{2}$$

(iv) $$\cosh (u+v) = \frac{e^{u+v} + e^{-(u+v)}}{2}$$

$$= \frac{e^u + e^{-u}}{2} \cdot \frac{e^v + e^{-v}}{2} + \frac{e^u - e^{-u}}{2} \cdot \frac{e^v - e^{-v}}{2}$$

$$= \cosh u \cdot \cosh v + \sinh u \cdot \sinh v$$

இது போல்,

$$\sin h\,(u+v) = \sin hu \cdot \cos hv + \cos hu \cdot \sin hv$$

$$\cos h\,(u-v) = \cos hu \cdot \cos hv - \sin hu \cdot \sin hv$$

$$\sin h\,(u-v) = \sin hu \cdot \cos hv - \cos hu \cdot \sin hv.$$

(v) $$\tanh 2u = \frac{\sinh 2u}{\cosh 2u} = \frac{2\sinh u \cdot \cosh u}{\cosh^2 u + \sinh^2 u}$$

$$= \frac{2\tanh u}{1 + \tanh^2 u}$$

3. வட்டச் சார்புகளுக்கும் (circular functions) அதிபர வளைவுச் சார்புகளுக்கும் (hyperbolic functions) உள்ள தொடர்புகள்.

θ ஆரையன்கள் அளவிலிருந்தால்

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{\angle 2} + \frac{\theta^4}{\angle 4} - \frac{\theta^6}{\angle 6} + \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{\angle 3} + \frac{\theta^5}{\angle 5} - \quad \ldots\ldots(2)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{\angle 1} + \frac{x^2}{\angle 2} + \frac{x^3}{\angle 3} = \ldots\ldots + \frac{x^n}{\angle n} + \quad \ldots\ldots(3)$$

என்பது x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும்.

எனவே $x = i\theta$ எனில்

$$e^{i\theta} = 1+\frac{i\theta}{\angle 1}+\frac{(i\theta)^2}{\angle 2}+\frac{(i\theta)^3}{\angle 3}+\frac{(i\theta)^4}{\angle 4}+\ldots\ldots$$

$$= 1+i\theta-\frac{\theta^2}{\angle 2}-\frac{i\theta^3}{\angle 3}+\frac{\theta^4}{\angle 4}+\ldots\ldots$$

$$=\left(1-\frac{\theta^2}{\angle 2}+\frac{\theta^4}{\angle 4}-\ldots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{\angle 3}+\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$= \cos\theta+i\sin\theta. \quad \{(1),\ (2)\text{-லிருந்து}\}$$

$x = -i\theta$ எனில்

$$e^{-i\theta} = 1+\frac{(-i\theta)}{\angle 1}+\frac{(-i\theta)^2}{\angle 2}+\frac{(-i\theta)^3}{\angle 3}+\frac{(-i\theta)^4}{\angle 4}+\ldots\ldots$$

$$= 1-\frac{i\theta}{\angle 1}-\frac{\theta^2}{\angle 2}+\frac{i\theta^3}{\angle 3}+\frac{\theta^4}{\angle 4}+\ldots\ldots$$

$$=\left(1-\frac{\theta^2}{\angle 2}+\frac{\theta^4}{\angle 4}-\ldots\right)-i\left(\theta-\frac{\theta^3}{\angle 3}+\ldots\ldots\right)$$

$$= \cos\theta-i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta+i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta-i\sin\theta$$

$$\therefore\ e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta \qquad \because\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \qquad \because\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\therefore\ \cos(i\theta) = \frac{e^{-\theta}+e^{\theta}}{2} = \cosh\theta \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\sin(i\theta) = \frac{e^{-\theta}-e^{\theta}}{2i} = -\frac{\left(e^{\theta}-e^{-\theta}\right)}{2i}$$

$$= i\,\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} = i\sinh\theta \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\therefore\ \tan(i\theta) = i \tanh\theta \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$\sin h\,(i\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i \sin\theta \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$\cos h\,(i\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \qquad \ldots\ldots(5)$$

$$\tan h\,(i\theta) = \frac{\sin h\,(i\theta)}{\cos h\,(i\theta)} = i \tan\theta \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$\sin h\,\theta = \tfrac{1}{2}\left[e^{\theta} - e^{-\theta}\right] = \tfrac{1}{2}\left[\left(1+\theta+\frac{\theta^2}{\underline{|2}}+\cdots\right) - \left(1-\theta+\frac{\theta^2}{\underline{|2}}-\frac{\theta^3}{\underline{|3}}+\cdots\right)\right]$$

$$= \theta + \frac{\theta^3}{\underline{|3}} + \frac{\theta^5}{\underline{|5}} + \cdots$$

$$\cos h\,\theta = \left[\left(1+\theta+\frac{\theta^2}{\underline{|2}}+\frac{\theta^3}{\underline{|3}}+\cdots\right) + \left(1-\theta+\frac{\theta^2}{\underline{|2}}-\cdots\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{\theta^2}{\underline{|2}} + \frac{\theta^4}{\underline{|4}} + \cdots$$

4. நேர்மாறு அதிபர வளைவுச் சார்புகள் (Inverse hyperbolic functions)

$\sinh^{-1}x$, $\cosh^{-1}x$, $\tanh^{-1}x$ நேர்மாறு அதிபர வளைவுச் சார்புகளாகும்.

(i) $y = \sinh^{-1}x$ எனக் கொள்வோம்.

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

(அ-து.) $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

e^y எப்பொழுதும் மிகை எண்ணாக இருப்பதால்

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\therefore\ y = \log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \sinh^{-1}x$$

(ii) $y=\cosh^{-1}x$

$$x=\cos hy = \frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

(அ-து.) $e^{2y}-2xe^y+1 = 0$

$$e^y = x\pm\sqrt{x^2-1}$$

$$= x+\sqrt{x^2-1} \text{ அல்லது } \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$y = \log_e(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$\text{அல்லது } -\log(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$= \pm\log_e(x+\sqrt{x^2-1})$$

சாதாரணமாக மிகைக் குறியைத்தான் (+ve sign) கொள்வது வழக்கம்.

(iii) $y=\tanh^{-1}x$

$$x=\tanh y = \frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\log_e\frac{1+x}{1-x}$$

$$\tanh^{-1}x = \tfrac{1}{2}\log_e\frac{1+x}{1-x}$$

மாதிரி 1 : நிரூபி : $\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}=\cosh 2x+\sinh 2x.$

$$\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}=\frac{1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}=\frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}$$

$$=\frac{2e^x}{2e^{-x}}=e^{2x}$$

$$\cosh 2x+\sinh 2x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}+\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$$

$$= e^{2x}$$

$$\therefore \frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = \cosh 2x+\sinh 2x$$

மாதிரி 2 : $\sin(A+iB) = \tan\alpha + i\sec\alpha$ ஆனால் $\cos 2A \cosh 2B = 3$ என நிரூபி.

$$\sin(A+iB) = \sin A \cos iB + \cos A \sin iB$$
$$= \sin A \cosh B + \cos A\, i \sinh B$$
$$= \tan\alpha + i \sec\alpha \text{ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)}$$
$$\therefore \tan\alpha = \sin A \cosh B$$
$$\sec\alpha = \cos A \sinh B$$
$$\therefore \sec^2\alpha - \tan^2\alpha = \cos^2 A \sinh^2 B - \sin^2 A \cosh^2 B$$
$$1 = \frac{1+\cos 2A}{2} \cdot \frac{\cosh 2B - 1}{2} - \frac{1-\cos 2A}{2} \cdot \frac{\cosh 2B + 1}{2}$$
$$4 = (1+\cos 2A)(\cosh 2B - 1) - (1-\cos 2A)(\cosh 2B + 1)$$
$$= 2\cos 2A \cdot \cosh 2B - 2$$
$$2 = \cos 2A \cosh 2B - 1$$
$$\therefore \cos 2A \cosh 2B = 3$$

மாதிரி 3 : $\tan(x+iy) = u+iv$ ஆனால் $\frac{u}{v} = \frac{\sin 2x}{\sinh 2y}$ எனக் காண்பி.

$$\tan(x+iy) = \frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)}$$
$$= \frac{2\cos(x-iy)\sin(x+iy)}{2\cos(x-iy)\cos(x+iy)}$$
$$= \frac{\sin 2x + \sin(2iy)}{\cos 2x + \cos(2iy)}$$
$$= \frac{\sin 2x + i\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$
$$= u + iv \text{ (கொடுக்கப்பட்டது)}$$
$$\therefore u = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cosh 2y}$$
$$v = \frac{\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$
$$\therefore \frac{u}{v} = \frac{\sin 2x}{\sinh 2y}$$

மாதிரி 4 : $\tan^{-1}(x+iy)$ன் மெய் கற்பனைப் பகுதிகளைப் பிரிக்கவும்.

$$\tan^{-1}(x+iy) = A+iB \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$\tan(A+iB) = x+iy\,;\ \therefore\ \tan(A-iB)=x-iy.$$

$$\tan 2A = \tan\{(A+iB)+(A-iB)\}$$

$$= \frac{\tan(A+iB)+\tan(A-iB)}{1-\tan(A+iB)\tan(A-iB)}$$

$$= \frac{x+iy+x-iy}{1-(x+iy)(x-iy)}$$

$$= \frac{2x}{1-(x^2+y^2)}$$

$$A = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{2x}{1-x^2-y^2}\right\}$$

$$\tan(2iB) = \tan\{(A+iB)-(A-iB)\}$$

$$i\tanh 2B = \frac{\tan(A+iB)-\tan(A-iB)}{1+\tan(A+iB)\tan(A-iB)}$$

$$= \frac{(x+iy)-(x-iy)}{1+(x+iy)(x-iy)}$$

$$= \frac{2iy}{1+x^2+y^2}$$

$$\tanh 2B = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$B = \tfrac{1}{2}\tanh^{-1}\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)$$

மாதிரி 5 : $9\cosh x+23\sinh x+54=0$ என்ற சமன்பாட்டை விடுவி.

$$9\,\frac{e^x+e^{-x}}{2}+23\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}+54 = 0$$

$$e^x = t \text{ என்றால்}$$

$$\tfrac{9}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\tfrac{23}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+54 = 0$$

$$9(t^2+1)+23(t^2-1)+108t = 0$$
$$16t^2+54t-7 = 0$$
$$16t^2+56t-2t-7 = 0$$
$$8t(2t+7)-(2t+7) = 0$$
$$(8t-1)(2t+7) = 0$$
$$t = \tfrac{1}{8} \text{ அல்லது } -\tfrac{7}{2}$$

$e^x=\frac{1}{8}$; $e^x=-\frac{7}{2}$ ஒப்புக் கொள்ள முடியாது. ஏனென்றால் e^x எப்பொழுதும் ஒரு மிகை எண்.

$e^x=-\frac{7}{2}$ எனில், xன் தீர்வு கற்பனை எண்ணாகும்.

$$x=-\log_e 8$$

மாதிரி 6 : $\cosh u = \sec\theta$ ஆனால் $u = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ எனக் காண்பி.

$$\cosh u = \sec\theta$$
$$u = \cosh^{-1}(\sec\theta)$$
$$u = \cosh^{-1}(\sec\theta)$$
$$= \log_e(\sec\theta+\sqrt{\sec^2\theta-1})$$
$$= \log_e(\sec\theta+\tan\theta)$$
$$= \log_e\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$
$$= \log_e\left\{1+\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right\}\Bigg/\left\{\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right\}$$
$$= \log_e\left\{\frac{\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)^2}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}\right\}$$
$$= \log_e\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}$$
$$= \log_e\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

மாதிரி 7 : $\tanh^{-1}x+\tanh^{-1}y = \tanh^{-1}\dfrac{x+y}{1+xy}$ என நிறுவி.

$\tanh^{-1} x = \alpha,\ \tanh^{-1}y = \beta$ எனக்கொள்வோம்.

$$x = \tanh\alpha,\ y = \tanh\beta$$

$$\frac{x+y}{1+xy} = \frac{\tanh\alpha+\tanh\beta}{1+\tanh\alpha\ \tanh\beta}$$

$$= \tanh(\alpha+\beta)$$

$$\tanh^{-1}\left\{\frac{x+y}{1+xy}\right\} = \alpha+\beta = \tan^{-1} x+\tanh^{-1}y.$$

மாதிரி 8 : $\log(a+ib)$ன் ஒரு மதிப்பு $\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)+i\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ ஆகும்.

$$a+ib = re^{(\theta+2n\pi)i}$$

$$\log(a+ib) = \log r+(\theta+2n\pi)i$$

$\log(a+ib)$ன் ஒரு மதிப்பு $= \log r+i\,\theta$

$$r = \sqrt{a^2+b^2},\quad \theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$\therefore\ \log(a+ib)$ன் ஒரு மதிப்பு $\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)+i\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$.

பயிற்சிகள் 19

1. பின்வருவனவற்றை நிறுவி.

(i) $\cosh 2x = \dfrac{1+\tanh^2x}{1-\tanh^2x}$

(ii) $\sinh 3x = 3\sinh x+4\sinh^3x$

(iii) $\cosh 3x = 4\cosh^3x-3\cosh x$

(iv) $\tanh 3x = \dfrac{\tanh^3x+3\tanh x}{1+3\tanh^2x}$

(v) $\cosh^{-1}x = \frac{1}{2}\log\dfrac{x+1}{x-1}$

(vi) $\dfrac{\cosh x-1}{\sinh x}=\dfrac{\sinh x}{\cosh x+1}=\tanh\dfrac{x}{2}$

(vii) $\operatorname{cosech} 2u+\coth 2u=\coth u.$

2. பின்வருவனவற்றின் மெய் கற்பனைப் பகுதிகளைப் பிரி.

(i) $\cot(x+iy)$ விடை : மெய் பகுதி $\dfrac{-\sin 2x}{\cos 2x-\cosh 2y}$; கற்பனை பகுதி $\dfrac{\sinh 2y}{\cos 2x-\cosh 2y}$

(ii) $\sin(x+iy)$ விடை: $\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

(iii) $\tanh(1+i)$ விடை : $\dfrac{\sinh 2+i\sin 2}{\cosh 2+\cos 2}$

(iv) $\sec(x+iy)$ விடை : $\dfrac{2\cos x\cosh y+2i\sin x\sinh y}{\cos 2x+\cosh 2y}$

3. நிரூபி.

(i) $\cosh^6\theta=\dfrac{1}{2^5}[\cosh 6\theta+6\cosh 4\theta+15\cosh 2\theta+10]$

(ii) $\sinh 5x=16\sinh^5 x+20\sinh^3 x+5\sinh x.$

4. சமன்பாடுகளைத் தீர்.

(i) $7\cosh x+8\sinh x=1.$ விடை : $-\log_e 3$

(ii) $14\cosh x+19\sinh x+22=0.$ விடை : $-\log_e 8.$

5. $\cos(u+iv)=x+iy$ ஆனால்

$(1+x)^2+y^2=(\cosh v+\cos u)^2$ என்றும்

$(1-x)^2+y^2=(\cosh v-\cos u)^2$ என்றும் நிரூபி.

இங்கு u, v, x, y எல்லாம் மெய் எண்களாகும்.

6. $\sin(A+iB)=x+iy$ ஆனால்

$\dfrac{x^2}{\sin^2 A}-\dfrac{y^2}{\cos^2 A}=1$ என்றும்

$\dfrac{x^2}{\cosh^2 B}+\dfrac{y^2}{\sinh^2 B}=1$ என்றும் நிரூபி.

7. $\tanh u=\dfrac{\sin x}{\cosh y}$, $\tan v=\dfrac{\sinh y}{\cos x}$ என்றால்

$\tanh(u+iv)=\sin(x+iy)$ என நிரூபி.

8. $\tan \frac{x}{2} = \tanh \frac{y}{2}$ ஆனால்

$$y = \log \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$ என நிரூபி.

9. $\coth^{-1} \left(\frac{2}{y} \right) = \sinh^{-1} \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}$ என நிரூபி.

10. நிரூபி: $\sinh^{-1} x = \cosh^{-1} \sqrt{1+x^2} = \tanh^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

11. நிரூபி.

(i) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\tan x + \sinh x - \sin 2x}{x^3} = \frac{11}{6}$

(ii) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x \cosh x - \tanh x}{x^3} = \frac{5}{6}$.

IV. வெக்டர் இயற்கணிதம்

(VECTOR ALGEBRA)

18. வெக்டர் இயற்கணிதம்

(Vector Algebra)

1. வெக்டரும் திசையிலியும் (vector and scalar):

ஒரு வெக்டர் திசையும் அளவும் உடையது. ஆனால் ஒரு திசையிலி (scalar)க்கு அளவு மட்டும் உண்டு, திசை கிடையாது. ஒரு வெக்டர் வழக்கமாக $\overrightarrow{OA}$ அல்லது $\overline{OA}$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. இதில் OA என்ற நீளம் அளவையும் O-விலிருந்து Aக்கு என்பது திசையையும் குறிக்கிறது. ஒரு வெக்டரின் அளவு அல்லது எண்ணளவு ஒன்று எனில், அந்த வெக்டர் "அலகு வெக்டர்" (unit vector) அல்லது "வெக்டர் அலகு" என அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு வெக்டர் தடித்த எழுத்துக்களில் குறிப்பிடப்படுகின்றது. OA என்பதை a என்று எழுதினால் $|a| = a$ அதன் எண்ணளவு ஆகும். இரு வெக்டர்கள் a, b சமமான அளவும் ஒரே திசையும் கொண்டிருப்பின் அவைகள் சமமானவை. அவைகள் $a=b$ எனக் குறிப்பிடப்படுகின்றது. a என்ற வெக்டரின் எண்ணளவு a என்ற எழுத்தாலும் அத்திசையில் உள்ள அலகு வெக்டர் $\hat{a}$ என்றும் குறிப்பிடப்படுகிறது. a என்ற வெக்டரின் திசைக்கு எதிர் திசையிலும் அதே எண்ணளவும் கொண்ட வெக்டர் $-a$ ஆகும். குறிப்பிட்ட புள்ளி வழியே செல்கின்ற கோட்டால் குறிப்பிடப்படும் வெக்டர் ஒரு 'ஓரிடப்படுத்திய வெக்டர்' (localised vector) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

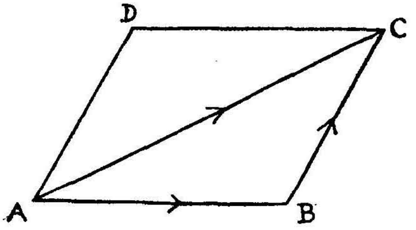
இடப்பெயர்ச்சி, வேகவளர்ச்சித்தகவு, திசைவேகம், உந்தம், விசை முதலியவை வெக்டர்களாகும். திசையிலிக்கு உதாரணங்கள் : ஆற்றல், அடர்த்தி, அழுத்தம், மிதவெப்பம் முதலியன.

O என்ற புள்ளியை மூலப்புள்ளியாகக் கொண்டால் $\overrightarrow{OA}$ என்பது A என்ற புள்ளியின் 'வெக்டர் நிலை' (position vector) எனப்படுகிறது.

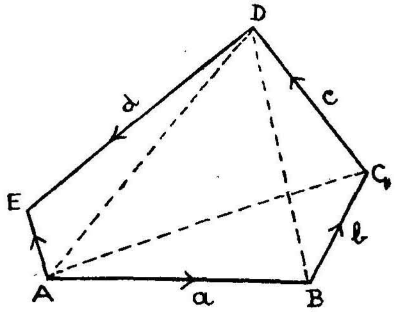
எண்ணளவு பூச்சியம் உள்ள வெக்டர்கள் 'சுன்ன வெக்டர்' அல்லது பூச்சிய வெக்டர் (zero or null vector) ஆகும். எல்லா பூச்சிய வெக்டர்களும் சமம்.

2. வெக்டர் கூட்டல் கழித்தல் :

(i) **கூட்டல் :** AB என்ற கோட்டை a என்ற வெக்டரைக் குறிக்க வரையவும். பின் Bயிலிருந்து BC என்ற கோட்டை b என்ற வெக்டரைக் குறிக்க வரையவும். ACஐ இணைக்கவும். Aயிலிருந்து Bக்கும் பின் Bயிலிருந்து Cக்கும் ஏற்படுகிற இடப் பெயர்ச்சி Aயிலிருந்து Cக்கு ஏற்படும் இடப் பெயர்ச்சிக்குச் சமம்.



படம் - 79



படம் - 80

$$a+b = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்யவும். எதிர் பக்கங்கள் இணையும் சமமும் ஆனவை. எனவே $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=b$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=a \qquad \therefore \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$$

$$(\text{அ - து.})\ b+a=\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore a+b=b+a$$

எனவே வெக்டர் கூட்டல் பரிமாற்றத்தக்கது (commutative).

வெக்டர்களை ஒன்றன்பின் ஒன்ருகச் சங்கிலித் தொடரில் இணைத்து வரைந்தால், ஆரம்பப் புள்ளியிலிருந்து முடிவுப் புள்ளியை இணைக்கும் கோடு எல்லா வெக்டர்களின் கூட்டுப்பலன் ஆகும். படம் (80ல்)

$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC} = a+b$$

$$\vec{BD}=\vec{BC}+\vec{CD} = b+c$$

$$\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD} = a+b+c$$

$$\vec{AE}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DE} = a+b+c+d$$

$$=\vec{AB}+\vec{BD}+\vec{DE} = a+(b+c)+d$$

$$=\vec{AD}+\vec{DE} = (a+b+c)+d$$ முதலியன.

மேலும் $\vec{AD} = \vec{AB}+\vec{BD} = \vec{AC}+\vec{CD}$

$$\therefore\ a+b+c = a+(b+c) = (a+b)+c$$

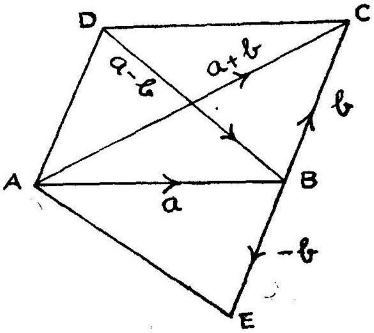
எனவே வெக்டர் கூட்டல் 'சேர்ப்பு விதியை' அனுசரிக்கிறது (**vector-addition is association**).

(ii) கழித்தல்

a என்ற வெக்டரிலிருந்து *b* என்ற வெக்டரைக் கழிப்பது *a* என்ற வெக்டருடன் $-b$ என்ற வெக்டரைக் கூட்டுவதே ஆகும்.

$$\vec{AB} = a;\quad \vec{BC} = b$$

ABCD என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்து *CB*ஐ $CB=BE$ என *E*க்கு நீட்டவும்.



படம் 81

$$\therefore\ \vec{BE} = -b$$

$$\vec{AB}-\vec{BC} = \vec{AB}+\vec{CB}$$

$$= \vec{AB}+\vec{BE}$$

$$= \vec{AE}$$

$$= \vec{DB}$$

$$\therefore\ DB = a-b$$

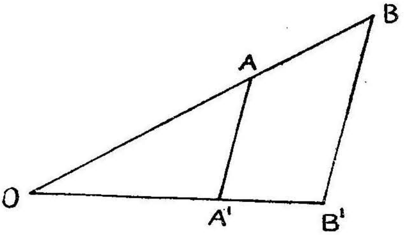
மேலும் $\vec{AB}-\vec{AD} = \vec{DB}$

3. வெக்டரை மெய்யெண்ணால் பெருக்குதல் :

a என்ற வெக்டரை n என்ற மெய்யெண்ணால் பெருக்கக் கிடைக்கும் பெருக்கற்பலன் na அல்லது an ஆகும்.

$a+a+a+\ldots\ldots n$ தடவைகள் $= na$

na என்பது ஒரு வெக்டர். இதனுடைய திசை a-ன் திசையேயாம். இதனின் எண்ணளவு a-ன் எண்ணளவைப்போல் n மடங்காகும்.



படம் 82

$$n(a+b) = na+nb$$

$\overrightarrow{OA'} = a,\ \overrightarrow{A'A} = b$ எனக் கொள்க.

பின் $\overrightarrow{OA} = a+b$

OA, OA'-ன் மீது B, B' என்ற இருபுள்ளிகளை

$\dfrac{OB'}{OA'} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{n}{1}$ என்ற விகிதத்தில் குறிக்கவும்.

$\therefore AA' \parallel BB'$

மேலும் $\overrightarrow{BB'} = n\overrightarrow{AA'} = nb$

$$\overrightarrow{OB'} = n\overrightarrow{OA'} = na$$

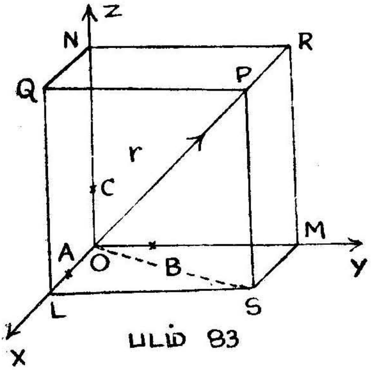
$$\overrightarrow{OB} = n\overrightarrow{OA} = n(a+b)$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B}$$

$$n(a+b) = na+nb$$

எனவே வெக்டர் பங்கீட்டு விதியை (distributive law) அனுசரிக்கிறது.

4. வெக்டர் குத்துப் பிரிவுகள் (Rectangular Resolution of a vector):



படம் 83

இங்கு நாம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று வெக்டர்களை எடுத்துக்கொண்டு எந்த ஒரு வெக்டர் r-ம் இந்த மூன்று வெக்டர்களின் மூலம் நிறுவப்படும் எனக் காட்டுவோம்.

OX, OY, OZ இவை மூன்றும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று கோடுகள். இவை செவ்வகக் கூற்றுத் தொகுதியைச் (Rectangular co-ordinate system) சேர்ந்தவை.

P என்பது முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு புள்ளி. இதன் நிலை வெக்டர் O என்ற மூலப்புள்ளியைச் சார்ந்து r என வை. $\overrightarrow{OP}=r$. Pயின் ஆயத்தொலைகள் x, y, z எனக் கொள்வோம். எனவே OP-ஐ மூலைவிட்டமாகக் கொண்டு ஒரு செவ்வக இணைகரத்தின் திண்மம் (Rectangular Parallelopiped) அமைத்தால் அதன் விளிம்புகள் $OL=x$, $OM=y$, $ON=z$ ஆகும்.

$A(1\ 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ என்ற மூன்று புள்ளிகளை OX, OY, OZ என்ற ஆயங்களின் மீது குறிக்கவும்.

$\overrightarrow{OA}=i$, $\overrightarrow{OB}=j$, $\overrightarrow{OC}=k$ எனக் கொள்வோம். இவைகள் ஆயங்களின் திசைகளிலுள்ள ஓரலகு வெக்டர்கள்.

$OL=xOA$, $OM=yOB$, $ON=zOC$ ஆகையால் $\overrightarrow{OL}=xi$, $\overrightarrow{OM}=yj$, $\overrightarrow{ON}=zk$ ஆகும்.

$$\therefore\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OP}$$

$$= \overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LS}+\overrightarrow{SP}$$

$$= \overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$$

$$= xi+yj+zk$$

எனவே $r = xi+yj+zk$

x, y, z என்பன r என்ற வெக்டரை OX, OY, OZ வழியே பிரிக்கப்பட்ட குத்துப் பிரிவுகள்

$$OP^2 = OL^2 + OM^2 + ON^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2$$
$$|r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = OP$$

α, β, γ என்பன முறையே OX, OY, OZ உடன் OP ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் எனில், பின்

$$x = OP \cos\alpha \qquad \therefore \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$y = OP \cos\beta \qquad \therefore \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

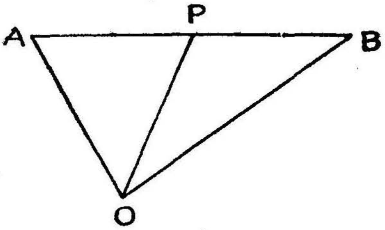
$$z = OP \cos\gamma \qquad \therefore \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ என்பவைகள் $\overrightarrow{OP}$ என்ற வெக்டரின் திசைக் கொசைன்கள் எனப்படும். இவை முறையே l, m, n எனக் குறிப்பிடப் படுகிறது. மேலும் $l^2+m^2+n^2 = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1.$

5. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விகிதத்தில் ஒரு கோட்டைப் பிரித்தல்.

A, B என்ற இரு புள்ளிகளின் வெக்டர் நிலை a, b எனக் கொள் கொள்வோம்.

எனவே $\overrightarrow{OA} = a, \quad \overrightarrow{OB} = b$



படம் 84

AB-ஐ P என்ற புள்ளி, $m : n$ விகிதத்தில் பிரிப்பதாகக் கொள் வோம்.

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$$

$\therefore\ mPB = nAP$

$$m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) = n(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})$$

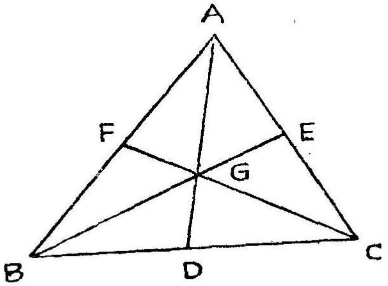
$$n.\overrightarrow{OP} + m.\overrightarrow{OP} = m.\overrightarrow{OB} + n.\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OP}(m+n) = mb + na$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP} = \frac{na+mb}{m+n}$$

கிளைமுடிவு : AB என்ற கோட்டின் மையப்புள்ளியின் வெக்டர் நிலை $\frac{a+b}{2}$

மாதிரி 1 : ஒரு முக்கோணத்தின் மையக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டுக.



படம் 85

A, B, C உச்சிகளின் வெக்டர் நிலை a, b, c எனக் கொள்வோம்.

D, E, F முறையே BC, CA, AB என்ற பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகள். இவைகளின் வெக்டர் நிலைகள் முறையே

$\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}$ ஆகும்.

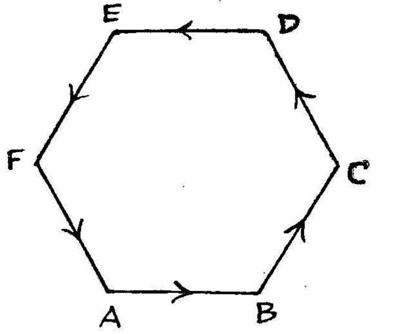
AD என்ற கோட்டை $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் G என்ற புள்ளியின் வெக்டர் நிலை

$$= \frac{\left(2 \times \frac{b+c}{2}\right) + (1 \times a)}{2+1}$$

$$= \frac{a+b+c}{3}$$

இவ்வாறே BE என்ற கோட்டை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் வெக்டர் நிலை $\frac{a+b+c}{3}$ எனவும் CF என்ற கோட்டை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் வெக்டர் நிலை $\frac{a+b+c}{3}$ எனவும் அறிகிறோம். எனவே மையக்கோடுகள் மூன்றும் G என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இப்புள்ளி மையக்கோட்டுச் சந்தி எனப்படுகின்றது.

மாதிரி 2 : ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் அடுத்தடுத்த இரு பக்கங்கள் a, b எனில் மற்ற பக்கங்களைக் காண்க.



படம் 86

$ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம் (regular hexagan) எனவும் $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{BC}=b$ எனவும் கொள்வோம்.

எனவே $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{BC}=-b \quad (\because EF \parallel BC)$

$\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AB}=-a \quad (\because DE \parallel AB)$

$\overrightarrow{FC}=2a$

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CF}=-2a$

(அ - து.) $\overrightarrow{CD}-a-b=-2a$

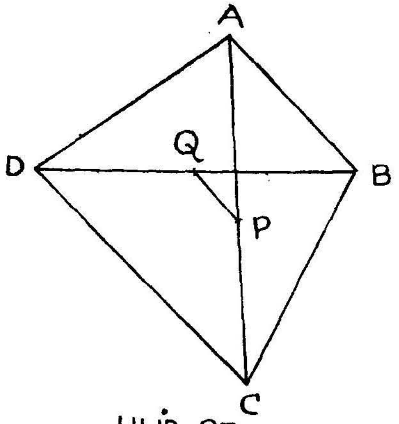
$\overrightarrow{CD}=b-a$

எனவே $\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{CD}$

$=a-b$

மாதிரி 3 : $ABCD$ ஒரு நாற்கரம். AC, BD என்ற பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகள் முறையே P, Q என்றால்

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{PQ} \text{ ஆகும்.}$$



படம் 87

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AQ}$$

[AB, AD-ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்தால் $AQ=A$ வழிச்செல்லும் மூலைவிட்டத்தில் பாதி]

$$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CQ}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=2(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{CQ})$$

ஆனால் $\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{CQ}=2\overrightarrow{PQ}$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=2(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{CQ})$$

$$=2(2\overrightarrow{PQ})$$

$$=4\overrightarrow{PQ}.$$

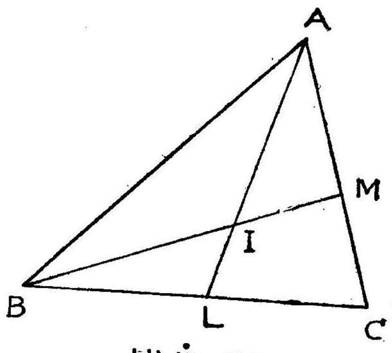
மாதிரி 4 : ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் சமவெட்டி ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கிறது என நிறுவுக.

O என்ற மூலப்புள்ளியைச் சார்ந்து A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் **a**, **b**, **c** எனக் கொள்வோம்.

BC, CA, AB என்ற பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே a, b, c என்போம்.

L என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\dfrac{b\mathbf{b}+c\mathbf{c}}{b+c}$

கோணம் B-ன் உள்சமவெட்டி AL-ஐ I-ல் வெட்டட்டும். பின்



படம் 88

$$\frac{AI}{IL}=\frac{BA}{BL}$$

$\therefore$ I-ன் நிலை வெக்டர் $\dfrac{a\mathbf{a}+b\mathbf{b}+c\mathbf{c}}{a+b+c}$

இம்முடிவின் சமச்சீரில் (Symmetry) இருந்து எல்லா உள்சம வெட்டிகளும் I என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது என நிரூபணம் ஆகிறது.

6. மையக்கோட்டுச் சந்திகள் அல்லது திணிவு மையங்கள் (Centroids)

1. O என்ற மூலப்புள்ளியைச் சார்ந்து A_1, A_2, A_3......A_n என்ற n புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$......$\mathbf{r}_n$ எனில் பின் $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{n}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+......+\mathbf{r}_n)$ என்ற நிலை வெக்டரையுடைய G என்ற புள்ளி கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் திணிவு மையம் எனப்படுகிறது.

2. p_1, p_2, p_3......என்பன n மெய் எண்களானுல் நிலை வெக்டர்

$$\overrightarrow{OG}=\frac{p_1\mathbf{r}_1+p_2\mathbf{r}_2+p_3\mathbf{r}_3+......+p_n\mathbf{r}_n}{p_1+p_2+p_3+......+p_n}$$

உடைய G எனும் புள்ளி p_1, p_2, p_3 என்ற எண்களுடன் இணைந்த புள்ளிகளின் திணிவு மையம் எனப்படுகிறது.

7. திணிவு மையம் வெக்டர்களின் மூலப் புள்ளியைச் சார்ந்து இல்லை (The centroid is independent of the origin of Vectors)

O என்ற மூலப் புள்ளியைச் சார்ந்து O' என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\mathbf{1}$ என வை. A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே a, b, c.

O'ஐ மூலப்புள்ளியாகக் கொண்டால் அதைச் சார்ந்து A, B, C-ன் நிலை வெக்டர்கள்

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO'} = a - 1$$

$$\overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO'} = b - 1$$

$$\overrightarrow{O'C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OO'} = c - 1$$

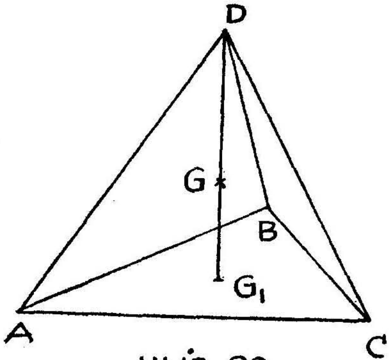
மூலப்புள்ளிகள் O, O'-ஐச் சார்ந்து G, G' என்பன திணிவு மையங்கள் எனக் கொள்வோம்.

$$O'G' = \frac{p_1(a-1)+p_2(b-1)+p_3(c-1)}{p_1+p_2+p_3+\dots\dots}$$

$$= \frac{p_1a+p_2b+p_3c+\dots}{p_1+p_2+p_3\dots} - 1$$

$$= \overrightarrow{OG} - 1 = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'G}$$

$\therefore$ G, G' என்ற புள்ளிகள் தம்முள் இணைந்து நிற்கவேண்டும்.



படம் 89

மாதிரி 5: ஒரு நான்முகத்தின் மத்தின் (tetrahedron) உச்சிகளை எதிர்ப்பக்கங்களின் மையக்கோட்டுச் சந்தியுடன் இணைக்கும் கோடுகள் ஒருபுள்ளி வழிச் செல்லும் எனக் காண்பி.

A, B, C, D உச்சிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே a, b, c, d எனக் கொள்வோம்.

ABC, BCD, CDA, DAB என்ற தின்மத்தின் முகங்களின் மையக்கோட்டுச் சந்திகள் முறையே $\frac{1}{3}(a+b+c)$, $\frac{1}{3}(b+c+d)$, $\frac{1}{3}(c+d+a)$, $\frac{1}{3}(d+a+b)$ ஆகும்.

ABC-யின் மையக்கோட்டுச் சந்தியான G_1-வுடன் D-யை இணை. G என்ற புள்ளி DG_1-ஐ 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

$$\therefore \quad OG = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}(a+b+c)+1 \cdot d}{4}$$

$$= \frac{a+b+c+d}{4}$$

இம்முடிவின் சமச்சீரிலிருந்து கூறப்பட்ட கோடுகள் யாவும் G என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது' என நிரூபணமாகிறது.

பயிற்சிகள்–20

1. A, B என்ற இரு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர் $i+2j-3k$, $2i-4j+k$ எனில் $\overrightarrow{AB}$-யைக் காண்க. விடை : $i-6j+4k$

2. A, B என்ற இரு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் $2i+3j+4k$, $3i-2j-3k$ எனில் $\overrightarrow{AB}$-யையும் $\overrightarrow{AB}$-ன் திசைக் கொசைன்களையும் காண்க. விடை : $i-5j-7k$; $\frac{1}{5\sqrt{3}}, \frac{-5}{5\sqrt{3}}, \frac{-7}{5\sqrt{3}}$

3. ABC என்ற ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையமான S-ல் $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ என்ற மூன்று விசைகள் செயல்படுகிறது என்றால், அவைகளின் விளைவு விசை $\overrightarrow{SO}$ என நிரூபி. (O என்பது முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம்)

4. $i, 2i, j, 2j, k, 2k$ என்ற 6 புள்ளிகளின் திணிவு மையத்தைக் காண்க. விடை : $\frac{i+j+k}{2}$

5. XYZ, $X'Y'Z'$ என்ற இரு முக்கோணங்களின் திணிவு மையங்கள் (Centroids) முறையே G, G'. XX', YY', ZZ' என்ற விசைகளின் விளைவு விசை $3GG'$ என நிறுவுக.

6. P, Q, R, S என்ற நான்கு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $x, y, x+2y, x-2y$ என்றால் $\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QS}, \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{RS}$ மதிப்புகளைக் காண்க. விடை: $2y, x-3y, x+y, -4y$

7. பின்வரும் வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் உள்ளன என நிரூபி.
   (i) $x-2y+3z, \ -2x+3y-4z, \ -y+2z$
   (ii) $5x+6y+7z, \ 3x+20y+5z, \ 7x-8y+9z$
   (iii) $9a+b-6c, \ 4a-6b+5c, \ 17c-14a-8b$

8. ABC என்ற முக்கோணத்தில் S, O என்பவை முறையே முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம், செங்கோட்டு மையம் என்றால், $OA+OB+OC = 2OS$ என நிறுவுக.

9. ஒரு இணைகரத்தின்மத்தின் நான்கு மூலைவிட்டங்கள் ஒரு புள்ளிவழிச் செல்கின்றன எனவும் அப்புள்ளியில் இம்மூலைவிட்டங்கள் இருசம துண்டுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன எனவும் நிறுவுக.

10. ஒரு நான்முகத்தின்மத்தின் (tetrahedron) எதிர்விளிம்புகளின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று சமமாக வெட்டிக் கொள்கின்றன என நிரூபி.

11. ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரு பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை என்றும் மூன்றாவது பக்கத்தின் அளவில் பாதி எனவும் நிறுவுக.

12. இணைகரம் $OABC$-யின் மூலைவிட்டங்கள் OB, AC, D புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. A, D புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $2i+j-k$, $i+2j+k$ ஆனால் C புள்ளியின் நிலைவெக்டர் என்ன?

விடை: $3j+3k$

13 ஒ முக்கோணத்தின் முனைகளின் (vertices) நிலைவெக்டர்கள் $4i+5j+6k$, $5i+6j+4k$, $6i+4j+5k$ ஆனால் முக்கோணம் சமபக்கங்களைக் கொண்டது என நிரூபி.

14. $3i-2j+k$, $i-3j+5k$, $2i+j-4k$ வெக்டர்களால் அமைந்த முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் எனக் காண்பி.

19. இரு வெக்டர்களின் பெருக்கம்
(Product of Two Vectors)

இரு வெக்டர்களின் எண்ணிப் பெருக்கி
(Scalar Product of Two vectors)

a, b என்ற இரு வெக்டர்களின் எண்ணிப் பெருக்கி, $ab \cos\theta$ என்ற மெய்யெண். இங்கு θ என்பது இவ்விரு வெக்டர்களுக்கிடையே யுள்ள கோணம்.

$a \cdot b = |a|\ |b| \cos\theta = ab \cos\theta = ba \cos\theta = b \cdot a$ இவ்விரு வெக்டர்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானால் $\theta = 90°$. $\cos 90 = 0$

எனவே $a \cdot b = 0$

$\theta = 0$ ஆனால் இரு வெக்டர்களும் ஒரே திசையில் உள்ளன. எனவே $a \cdot b = ab \cos\theta = ab$.

$\theta = 180°$ ஆனால் $\cos\theta = \cos 180° = -1$

$\therefore\ a \cdot b = -ab$

ஆகவே a, b என்ற இரு வெக்டர்கள் செங்குத்தானால் $a \cdot b = 0$; இவ்விரு வெக்டர்களும் ஒரே திசையிலிருந்தால் $a \cdot b = ab$. இவைகள் எதிர் திசையிலிருந்தால் $a \cdot b = -ab$.

மேலும் $a = b$ ஆனால் $\theta = 0$

$\therefore\ a \cdot a = |a|\ |a| = a^2$.

$a \cdot b = |a|\ |b| \cos\theta$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\ |b|}$$

பின் வருவனவற்றை நாம் எளிதில் நிரூபிக்கலாம்.

(i) $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$

$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$

(ii) $(ma) \cdot b = mab \cos \theta = mba \cos \theta = (mb) \cdot a$

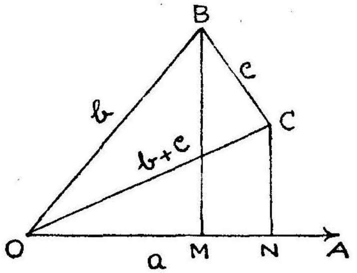
$= a \cdot (mb)$

(iii) c என்ற வெக்டரை $(a \cdot b)$ என்ற மெய் எண்ணால் பெருக்கி நாம் பெறுவது $(a \cdot b)$c.

(iv) $(a \cdot b)$ என்ற எண்ணை $(c \cdot d)$ என்ற எண்ணால் பெருக்கினால் நாம் பெறுவது $(a \cdot b)(c \cdot d)$ என்னும் ஒரு திசையிலி.

பங்கீட்டு விதி

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$



படம் 90

$\overrightarrow{OA} = a$

$\overrightarrow{OB} = b$

$\overrightarrow{BC} = c$

$\overrightarrow{OC} = b+c$

$a \cdot (b+c) = a \cdot (\overrightarrow{OC})$

$= a\,(ON)$

$= a\,(OM+MN)$

$= a\ OM + a\ ON$

$= a \cdot b + a \cdot c$

மேற்கூறிய விதியைப் பின்பற்றிப் பின் வருவனவற்றை எளிதில் பெறலாம்.

(i) $(a+b+c+\ldots) \cdot (l+m+n+\ldots)$

$= a \cdot l + a \cdot m + a \cdot n + \ldots\ldots$

$+ b \cdot l + b \cdot m + b \cdot n + \ldots\ldots$

$+ c \cdot l + c \cdot m + c \cdot n + \ldots\ldots$

(ii) $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

$= a^2 + 2a \cdot b + b^2$

(iii) $(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b)$

$= a^2 - 2a \cdot b + b^2$

(iv) $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

(v) $a=a_1\, i+a_2\, j+a_3\, k$;

$b=b_1\, i+b_2\, j+b_3\, k$ ஆனால்

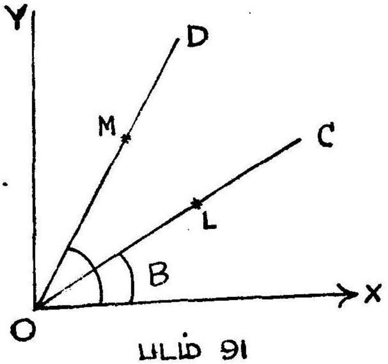
$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$|a|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$; $|b|^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$

$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a|\,|b|} = \frac{a_1\,b_1+a_2\,b_2+a_3\,b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

(vi) $a_1\,a_2+b_1\,b_2+c_1\,c_2=0$ ஆனால் a, b என்ற இரு வெக்டர்களும் செங்குத்தானவை.

மாதிரி 1: நிரூபி: $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$.



படம் 91

$\angle DOX=A$, $\angle COX=B$

$\therefore\ \angle COD=A-B$

OC, OD திசையில் OL, OM என்பவை அலகு வெக்டர்கள்.

$$\therefore\ \overrightarrow{OL}\cdot\overrightarrow{OM} = \cos(A-B)$$

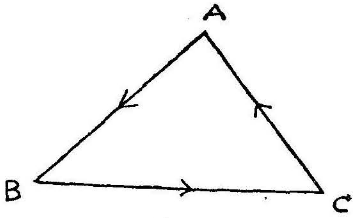
$$\overrightarrow{OL} = (\cos B)\, i+(\sin B)\, j$$

$$\overrightarrow{OM} = (\cos A)\, i+(\sin A)\, j$$

எனவே. $\overrightarrow{OL}\cdot\overrightarrow{OM}=[(\cos B)i+(\sin B)j]\cdot[(\cos A)i+(\sin A)j]$

$= \cos A\cos B+\sin A\sin B$

மாதிரி 2 : நிரூபி $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



படம் 92

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$$

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}$$

$$(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})^2=(-\overrightarrow{AB})^2$$

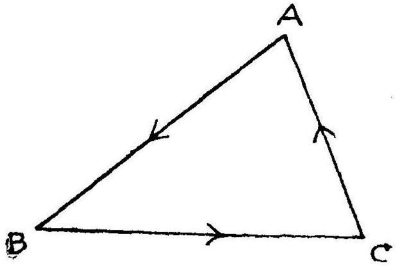
$$BC^2+2\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{CA^2}+CA^2=AB^2$$

$$a^2+2ab\cos(180-c)+b^2=c^2$$

$$\therefore\quad a^2+b^2-2ab\cos c=c^2$$

எனவே $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

மாதிரி 3 : நிரூபி. $a\cos B+b\cos A=c$



படம் 93

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$$

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}$$

இருபுறமும் $\overrightarrow{AB}$ஆல் பெருக்க.

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CA}=-AB^2$$

$$\therefore\quad ca\cos(180-B)+cb\cos(180-A)=-c^2$$

$$-ca\cos B-cb\cos A=-c^2$$

$$\therefore\quad a\cos B+\ b\cos A=c.$$

மாதிரி 4: $2i-j+k$, $i-3j-5k$, $3i-4j-4k$ என்ற மூன்று வெக்டர்களும் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கின்றன என நிரூபி.

இரு வெக்டர்களின் கூட்டற்பலன் மூன்றாவது வெக்டருக்குச் சமமெனின் இம்மூன்று வெக்டர்களும் ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்கின்றன.

$$a=2i-\ j+k$$

$$b=\ i-3j-5k$$

$$c=3i-4j-4k \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$a+b=(2i-j+k)+(i-3j-5k)$$

$$=3i-4j-4k=c$$

எனவே a, b, c என்ற மூன்று வெக்டர்களும் ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்கின்றன.

$$a\,.\,b=(2i-j+k)\,.\,(i-3j-5k)$$

$$=2+3-5$$

$$=0$$

எனவே முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

மாதிரி 5: $i-2j+3k$, $2i+j-k$, $3i-j+2k$ என்பனவற்றை நிலை வெக்டர்களாக உடைய மூன்று புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணங்களின் பக்கங்களையும் கோணங்களின் பக்கங்களையும் கோணங்களையும் காண்க.

A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $i-2j+3k$, $2i+j-k$, $3i-j+2k$ எனக் கொள்வோம்.

O மூலப்புள்ளியானால் $\overrightarrow{OA}=\ i-2j+3k$

$$\overrightarrow{OB}=2i+\ j-\ k$$

$$\overrightarrow{OC}=3i-\ j+2k$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2i+j-k)-(i-2j+3k)$$
$$= i+3j-4k$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (3i-j+2k)-(2i+j-k)$$
$$= i-2j+3k$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (i-2j+3k)-(3i-j+2k)$$
$$= -2i-j+k$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+3^2+4^2} = \sqrt{26}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$$

முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $\sqrt{26}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{6}$ ஆகும்.

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(i+3j-4k)\cdot(2i+j-k)}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{6}}$$

$$= \frac{2+3+4}{\sqrt{156}} = \frac{9}{\sqrt{156}}$$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}|\ |\overrightarrow{BA}|} = \frac{(i-2j+3k)\cdot(-i-3j+4k)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}$$

$$= \frac{-1+6+12}{\sqrt{364}}$$

$$= \frac{17}{\sqrt{364}}$$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\ |\overrightarrow{CB}|} = \frac{(-2i-j+k)\cdot(-i+2j-3k)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}$$

$$= \frac{2-2-3}{\sqrt{84}}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{84}}$$

மாதிரி 6 : $-2a+3b+5c$, $a+2b+3c$, $7a-c$ என்பவைகளை நிலைவெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைந்துள்ளன என நிரூபி.

$$\overrightarrow{OA} = -2a+3b+5c$$

$$\overrightarrow{OB} = a+2b+3c$$

$$\overrightarrow{OC} = 7a-c \quad (O \text{ மூலப்புள்ளி})$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} = (a+2b+3c)-(-2a+3b+5c)$$
$$= 3a-b-2c$$

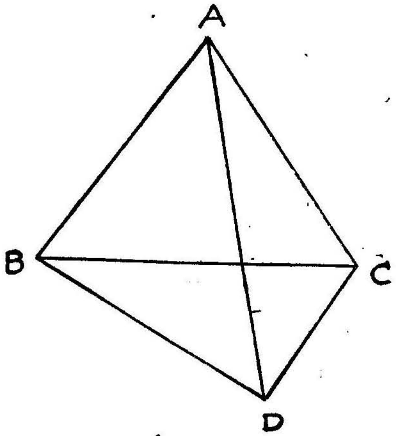
$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC} = (-2a+3b+5c)-(7a-c)$$
$$= -9a+3b+6c$$

$$\overrightarrow{AC} = 9a-3b-6c$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = 3\,(3a-b-2) = 3\,\overrightarrow{AB}$$

மேலும் $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ வெக்டர்கள் ஒரே புள்ளியில் முடிவடைகின்றன. எனவே A, B, C ஒரே கோட்டில் அமைந்த புள்ளிகள்.

மாதிரி 7 : ஒரு நான்முக திண்மத்தின் (tetrahedron) இரு ஜோடி எதிர் விளிம்புகள் செங்குத்தானால், மூன்றாவது ஜோடி எதிர் விளிம்புகளும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாகும்.



படம் 94

A, B, C, D என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே a, b, c, d எனக் கொள்வோம்.

AD, BC ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்து

AC, BD ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்து

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = d - a$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = c - b$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = c - a$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = b - d$$

$$AD \perp BC \quad \therefore (d-a) \cdot (c-b) = 0$$

(அ-து.) $d \cdot c - d \cdot b - a \cdot c + a \cdot b = 0$

(அ-து.) $a \cdot b + c \cdot d = b \cdot d + a \cdot c$ (1)

$$AC \perp DB \quad \therefore (c-a) \cdot (b-d) = 0$$

(அ-து.) $c \cdot b - c \cdot d - a \cdot b + a \cdot d = 0$

(அ-து.) $a \cdot b + c \cdot d = b \cdot c + a \cdot d$ (2)

(1), (2)லிருந்து $b \cdot d + a \cdot c = b \cdot c + a \cdot d$

$$b \cdot d - b \cdot c + a \cdot c - a \cdot d = 0$$

$$-b \cdot (c-d) + a \cdot (c-d) = 0$$

$$\therefore (a-b) \cdot (c-d) = 0$$

$\therefore AB, CD$ என்ற விளிம்புகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

மாதிரி 8 : $2i - j + k$, $3i + 4j - k$ வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தான அலகு வெக்டர் (unit vector) காண்க.

அலகு வெக்டர் $n = ai + bj + ck$, கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்களுக்கு செங்குத்தானது எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore n \cdot (2i - j + k) = 0$$

$$n \cdot (3i + 4j - k) = 0$$

$$\therefore 2a - b + c = 0$$

$$3a + 4b - c = 0$$

மேற்குறித்த சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\frac{a}{1-4} = \frac{b}{3+2} = \frac{c}{8+3}$$

$$\frac{a}{-3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{11}$$

$$\text{வேண்டிய அலகு வெக்டர்} = \frac{ai+bj+ck}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{155}}i + \frac{5}{\sqrt{155}}j + \frac{11}{\sqrt{155}}k$$

மாதிரி 9 : ஒரு நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்கள் செங்கோணத்தில் சமமாக வெட்டிக் கொண்டால், நாற்கரம் ஒரு சாய்சதுரம் (Rhombus) என நிரூபி.

நாற்கரம் $ABCD$யின் Aயை மூலப்புள்ளியாகக் கொண்டு, B, C, Dயின் நிலை வெக்டர்கள் b, c, d எனக் கொள்வோம்.

AC, BDயின் மையப் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}(b+d)$ ஆகும்.

இவை ஒரே புள்ளியைக் குறிப்பதால் $c = b+d$ (1)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$

$$\text{ஆனால் } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

எனவே $BC = AD$, மேல் BC, ADக்கு ஒரு போகாக இருக்கும்.

$\therefore$ $ABCD$ ஒரு இணைகரம் ஆகும்.

AC, BDக்குச் செங்குத்து ஆனதால்

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$(\text{அ-து.})\ c \cdot (d-b) = 0$$

$$(1)\text{லிருந்து } (b+d) \cdot (d-b) = 0$$

$$d^2-b^2 = 0$$

$$(\text{அ-து.})\ d^2 = b^2$$

$$AD^2 = AB^2$$

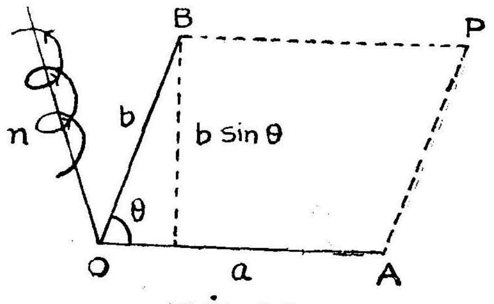
$$(\text{அ-து.})\ AD = AB$$

$\therefore$ $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரம் (Rhombus) ஆகும்.

(2) இரு வெக்டர்களின் குறுக்குப் பெருக்கி (Vector product of two vectors)

a, b என்ற வெக்டர்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் θ ஆகவும் a, b என்ற வெக்டர்களைக் கொண்ட தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள

அலகு வெக்டர் n ஆகவும் இருந்தால் இவ்விரு வெக்டர்களின் குறுக்குப் பெருக்கி $a \times b = ab \sin \theta\, n$.



படம் 95

a, b, $ab \sin \theta\, n$ என்ற மூன்று வெக்டர்களும் வலக்கைத் திருகாணி வழக்கை (Right handed screw convention) அனுசரிக்கிறது.

இதிலிருந்து $a \times b = -b \times a$ என அறிகிறோம்.

$OAPB$ ஒரு இணைகரம் $OA = a$, $OB = b$

வெக்டர் பரப்பு $OAPB = a \times b$

வெக்டர் பரப்பு $OBPA = b \times a$

$$a \times b = ab \sin \theta\, n$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{a \times b}{|a|\ |b|}$$

பின் வருபனவற்றை எளிதில் அறியலாம்

(i) $\theta = 0$ அல்லது $180°$ ஆனால் $\sin \theta = 0$

$\therefore$ $a \times b = 0$ ஆனால் இரு வெக்டர்களும் இணை.

(ii) $\theta = 90°$ ஆனால் $\sin \theta = 1$

$\therefore$ $|a \times b| = ab$

(iii) i, j, k என்ற அலகு வெக்டர்களை எடுத்துக் கொண்டால்

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k \qquad j \times i = -k$$

$$j \times k = i \qquad k \times j = -i$$

$$k \times i = j \qquad i \times k = -j$$

(iv) m ஒரு எண்ணானால்

$$(ma) \times b = mab \sin \theta\, n = a \times (mb)$$

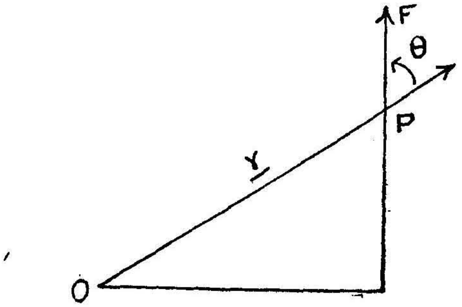
3. இரு வெக்டர்களின் குறுக்குப் பெருக்கியை அணிகோவை (Determinant) வடிவில் எழுதுதல்

$$
\begin{aligned}
a &= a_1 i + a_2 j + a_3 k \\
b &= b_1 i + b j_2 + b_3 k \\
a + b &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\
&= a_1 b_1 (i \times i) + a_1 b_2 (i \times j) + a_1 b_3 (i \times k) \\
&\quad + a_2 b_1 (j \times i) + a_2 b_2 (j \times j) + a_2 b_3 (j \times k) \\
&\quad + a_3 b_1 (k + i) + a_3 b_2 (k + j) + a_3 b_3 (k + k) \\
&= a_1 b_2 k - a_1 b_3 j - a_2 b_1 k + a_2 b_3 i + a_3 b_1 j - a_3 b_2 i \\
&= i(a_2 b_3 - a_3 b_2) + j(a_3 b_1 - a_1 b_3) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

4. ஒரு விசையின் சுழல்திறன் (Moment of a force)

O என்ற புள்ளியைப் பற்றிய F என்ற ஓர் விசையின் சுழல்திறன் (moment) விசையையும் O-லிருந்து விசைக்குள்ள செங்குத்துத் தூரத் தையும் பெருக்கி வந்த பலனாகும்.

$$
\begin{aligned}
\text{குறியீட்டில் } M &= \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{F} \\
&= r \times F \\
&= r \sin\theta \,.\, F.
\end{aligned}
$$



படம் 96

5. ஒரு விசையின் வேலைத்திறன் (Work done by a Force)

F என்ற விசை செலுத்தப்பட்ட புள்ளி நகர்ந்த தூரம் S ஆனால் நடைபெற்ற வேலை அல்லது விசையின் வேலைத்திறன் இவ்விரு வெக் டர்களின் எண்ணிப் பெருக்கியாம்.

குறியீட்டில் $W = F \,.\, S.$

6. முக்கோணத்தின் பரப்பு

A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் a, b, c எனில் இம் மூன்று புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு காணல்.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = c - b$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = a - b \quad (O \text{ மூலப்புள்ளி})$$

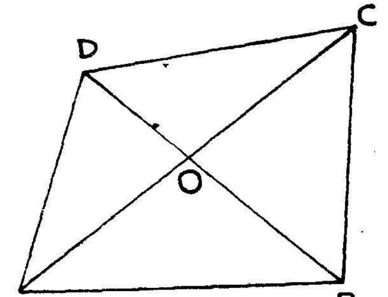
முக்கோணம் ABC-யின் பரப்பு

$$= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA})$$
$$= \tfrac{1}{2}[(c-b)\times(a-b)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(c\times a - c\times b - b\times a + b\times b]$$
$$= \tfrac{1}{2}[c\times a + b\times c + a\times b] \quad \{\because b\times b = 0\}$$
$$= \tfrac{1}{2}[a\times b + b\times c + c\times a]$$

$a\times b + b\times c + c\times a = 0$ ஆனால், A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமையும்.

மாதிரி 10: $ABCD$ என்ற ஒரு நாற்கரத்தின் வெக்டர் பரப்பு $\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}$ என நிரூபி.

AC, BD என்ற மூலைவிட்டங்கள் O-ல் வெட்டுகின்றன.



படம் 97

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\times(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD})$$
$$= (\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD})$$
$$= (\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD})$$

$$= 2\,\Delta\, OAB + 2\,\Delta\, ODA + 2\,\Delta\, OBC + 2\,\Delta\, OCD$$
$$= 2\,(\Delta\, OAB + \Delta\, ODA + \Delta\, OBC + \Delta\, OCD)$$
$$= 2\,(\text{நாற்கரம் } ABCD\text{-யின் பரப்பு})$$

$$\therefore\ \text{நாற்கரம் } ABCD\text{-யின் பரப்பு} = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}$$

மாதிரி 11: $A\,(1, 2, 3)$, $B\,(2, 6, -3)$, $C\,(1, -1, 2)$ என்ற உச்சிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு என்ன?

$$\overrightarrow{OA} = i + 2j + 3k$$

$$\overrightarrow{OB} = 2i + 6j - 3k$$

$$\overrightarrow{OC} = i - j + 2k$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2i + 6j - 3k) - (i + 2j + 3k)$$
$$= \qquad = i + 4j - 6k$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (i - j + 2k) - (i + 2j + 3k)$$
$$= -3j - k$$

$$\Delta\, ABC = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$
$$= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[i(-4-18) - j(-1) + k(-3)]$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[-22i + j - 3k]$$
$$\Delta\, ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{484+1+9} = \tfrac{1}{2}\sqrt{494}\ \text{sq. units.}$$

மாதிரி 12: $2i - j + 2k$, $10i - 2j + 7k$ என்ற வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தாய் உள்ள வெக்டரின் அலகு வெக்டரைக் காண்க.

$$a = 2i - j + 2k$$
$$b = 10i - 2j + 7k$$

$a \times b$ எனும் வெக்டர் a, b என்ற வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தாய் உள்ளது.

$$\text{வேண்டிய அலகு வெக்டர்} = \frac{a\times b}{|a\times b|}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 10 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= i(-7+4) - j(14-20) + k(-4+10)$$

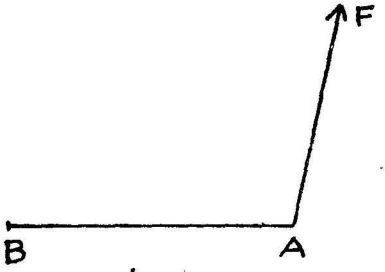
$$= -3i + 6j + 6k$$

வேண்டிய அலகு வெக்டர் $= \dfrac{-3i+6j+6k}{\sqrt{9+36+36}}$

$$= \frac{-3i+6j+6k}{9}$$

$$= \frac{-i+2j+2k}{3}$$

மாதிரி 13 : A என்ற புள்ளியில் செயல்படும் F என்ற விசையின் B என்ற புள்ளியைப் பற்றிய சுழல்திறனைக் கணக்கிடுக. A, B என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர் முறையே $i-j+2k$, $2i-j+3k$



படம் 98

$$F = 3i + j + 2k$$

சுழல்திறன் $\vec{M} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (i-j+2k) - (2i-j+3k)$$

$$= -i - k$$

$$\therefore \vec{M} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$$

$$= (-i-k) \times (3i+j+2k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= i(0+1)-j(-2+3)+k(-1-0)$$
$$= i+j-k$$

எனவே சுழல்திறனின் எண்ணளவு $= \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

மாதிரி 14 : a, b, c ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள். $a+b+c=0$ ஆனல் $a\times b=b\times c=c\times a$ என நிறுவுக. இதை திரிகோண கணித வாயிலாகத் தெளிவுபடுத்துக.

$$a+b+c=0$$
$$\therefore a\times(a+b+c)=0$$
$$a\times b+a\times c=0 \qquad (\because a\times a=0)$$
$$a\times b=-a\times c=c\times a$$

இதேபோல் $b\times(a+b+c)=0$

$$\therefore a\times b=b\times c$$

எனவே $a\times b=b\times c=c\times a$

$a+b+c=0$ ஆனதால் a, b, c முக்கோணம் ABC யின் மூன்று பக்கங்களைக் குறிக்கின்றன.

$a\times b$, $b\times c$, $c\times a$ என்ற வெக்டர்கள் முக்கோண தளத்திற்குச் செங்குத்தானவை.

$\therefore a\times b=b\times c$ என்பது $|a\times b| = |b\times c|$

$$BC\,.\,CA\sin(180-C)=CA\,.\,AB\sin(180-A)$$
$$ab\sin C=bc\sin A$$

a, b, c வெக்டர் a, b, c ன் நீளங்கள்

$$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

இதேபோல் $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ என நிறுவலாம்.

$$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

பயிற்சிகள் 21

1. ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டற் பலன் மூன்றுவது பக்கத்தின் பாதியின் வர்க்கத்தையும், மூன்றுவது பக்கத்தைப் பிரிக்கும் மையக்கோட்டின் வர்க்கத்தையும் கூட்டி வந்த பலனின் இரு மடங்காகும் என நிறுவுக.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம், மையக்கோட்டுச் சந்தி, செங்கோட்டுச் சந்தி ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில்

அமைந்துள்ளன என நிரூபி. மேலும் மையக் கோட்டுச் சந்தி சுற்று வட்ட மையத்தையும் செங்கோட்டுச் சந்தியையும் இணைக்கும் கோட்டை 1 : 2 விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என நிறுவுக.

3. $A(1, 2, 3)$, $B(2, 5, -1)$, $C(-1, 1, 2)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

4. $2i-3j+4k$, $3i-4j+2k$ என்ற இரு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தான அலகு வெக்டர் யாது? விடை : $\dfrac{10i+8j+k}{\sqrt{165}}$

5. $2i+3j-4k$, $8i-12j-5k$ என்ற இரு வெக்டர்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிரூபி.

6. $a=|a|$, $b=|b|$ என்றால்

(i) a, b என்ற வெக்டர்களின் இடையேயுள்ள கோணத்தை $\dfrac{ab+ba}{a+b}$ என்ற வெக்டர் சமமாகப் பிரிக்கிறது எனவும்

(ii) $ab+ba$ என்ற வெக்டரும் $ba-ab$ என்ற வெக்டரும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனவும் நிறுவுக.

7. பின் வருவனவற்றை நிரூபி.

(i) $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

(ii) $(a-b)\times(a+b)=2a\times b$

8. $4i+j-3k$, $3i+j-k$ என்ற இரு விசைகள் ஒரு துகளின் (Particle) மீது செயல்படுகின்றது. இவைகள் இத் துகளை A என்ற புள்ளியிலிருந்து B என்ற புள்ளிக்கு நகர்த்துகின்றன. A, B புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $i+2j+3k$, $5i+4j+k$ என்றால் நடைபெற்ற வேலையின் அளவு என்ன? விடை : 40 அலகுகள்

9. B என்ற படகைச் சார்ந்து A என்ற படகின் வேகம் (சார்வேகம்) $5i+2j$. C என்ற படகைச் சார்ந்து B யின் சார்வேகம் $2i-9j$. i, j என்பவை முறையே கிழக்கு, வடக்கு திசைகளின் மணிக்கு 1 மைல் திசைவேகம் என்பதைக் குறித்தால், C என்ற படகைச் சார்ந்த A படகின் வேகம் என்ன? விடை : $7\sqrt{2}\ m/h$

10. $2i-j+k$, $i+3j-5k$, $3i-4j-4k$ என்ற நிலை வெக்டர்களைக் கொண்ட மூன்று புள்ளிகளால் அமையப் பெறும் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களையும் மிகச் சிறிய கோணத்தையும் காண்க.

11. $3i+j+2k$, $2i-2j+4k$ என்ற வெக்டர்களின் இடையேயுள்ள கோணத்தையும் இவைகளுக்குச் செங்குத்தான அலகு வெக்டரையும் காண்க.

விடை : $\sin^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{7}}$; $(i-j-k)\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

12. ABC என்ற முக்கோணத்தில் A, B, C என்ற உச்சிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $2i-j+k$, $i-3j-5k$, $3i-4j-4k$ ஆனால் முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் என நிறுவுக.

13. A, B புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $4i+2j-3k$, $2i-3j+4k$ ஆனால் A வழிச் செல்லும் $F=3i+4j-5k$ என்ற விசையின் சுழல்திறன் B யைப் பற்றி என்ன? விடை : $\sqrt{179}$

14. $3i+k$ என்ற விசை $2i-j+3k$ என்ற நிலை வெக்டரைக் கொண்ட புள்ளி வழிச் செயல்படுகிறது. $i+2j-k$ என்ற நிலை வெக்டரைக் கொண்ட புள்ளியைப் பற்றிய இவ்விசையின் சுழல்திறன் யாது? விடை : $\sqrt{211}$

15. $4i+5j+6k$, $5i+6j+4k$, $6i+4j+5k$ நிலை வெக்டர்களைக் கொண்ட மூன்று புள்ளிகளால் அமையப்பெறும் முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக.

16. $a=i-2j+3k$, $b=2i+3j-4k$, $c=-7j+10k$ எனின் இவைகளை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைந்துள்ளன என நிரூபி.

17. A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே a, b, $3a-2b$ எனின், இம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமைந்துள்ளன என நிறுவுக.

18. $(2, -2, 1)$ புள்ளியில் $\vec{F}=4i-3j+k$ என்ற விசை செயல்படுகிறது எனில்

(i) $(3, -2, 4)$ புள்ளியைப் பற்றிய $\vec{F}$-ன் சுழல்திறனையும்

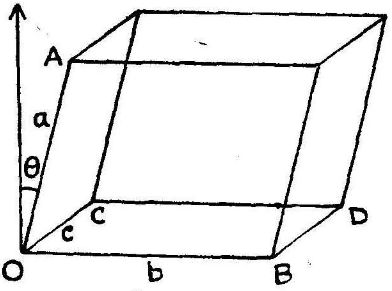
(ii) x அயத்தைப் பற்றிய $\vec{F}$-ன் சுழல்திறனையும் காண்க.

விடை : (i) $\sqrt{190}$ (ii) 1

20. இரண்டிற்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களின் பெருக்கம்

(Products of more than two vectors)

1. எண்ணி முப்பெருக்கி (Scalar triple product)



படம் 99

படத்தில் காட்டியுள்ளது ஒரு இணைகரத்தின்மம் (parallelopiped). $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b = \overrightarrow{OC} = c : b \times c = n$ 'என்பது ஒரு வெக்டர். $OBDC$ என்ற இணைகரத்துக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது இவ் வெக்டர். இதனுடைய எண்ணளவு இணைகரம் $OBDC$-ன் பரப்பாகும்.

$b \times c$ என்ற வெக்டர் a என்ற வெக்டருடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்திருப்பின்

$$a \cdot (b \times c) = a \cdot n = an \cos\theta = V$$

$$= \text{இணைகரத்தின்மத்தின் கொள்ளளவு}$$

$$\therefore \quad V = a \cdot (b \times c).$$

$a \cdot (b \times c)$ ஒரு திசையிலியாகும்.

இவ்வாறே $V = b \cdot (c \times a)$

$V = c \cdot (c \times b)$ எனவும் நிறுவலாம்.

$b \times c = -c \times b$ என ஏற்கெனவே நிரூபித்துள்ளோம்.

இதிலிருந்து பின்வருவனவற்றை நிறுவலாம்.

$$
\begin{aligned}
V = a \cdot (b \times c) &= (b \times c) \cdot a = -\, a \cdot (c \times b) = -\,(c \times b) \cdot a \\
&= b \cdot (c \times a) = (c \times a) \cdot b = -\, b \cdot (a \times c) = -\,(a \times c) \cdot b \\
&= c \cdot (a \times b) = (a \times b) \cdot c = -\, c \cdot (b \times a) = -\,(b \times a) \cdot c
\end{aligned}
$$

மேலே உள்ளதிலிருந்து பின்வரும் விதிகளை அமைக்கலாம்.

(i) காரணிகளின் வட்ட வரிசை மாறுதிருக்கும்படி வரை எண்ணி மூப்பெருக்கியின் குறி மாறுது.

(ii) ஒவ்வொரு வட்ட வரிசை மாற்றத்திற்கும் ஒரு எதிர் குறி (minus sign) சேர்த்துக் கொள்ளப்படுகிறது.

(iii) புள்ளி குறியையும், பெருக்கல் குறியையும் உசிதம்போல் மாற்றிக் கொள்ளலாம்.

2. $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$ ஆனால்

$$
a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
$$

$$
b \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
$$

$$
= i(b_2 c_3 - b_3 c_2) - j(b_1 c_3 - b_3 c_1) + k(b_1 c_2 - b_2 c_1)
$$

$$
a \cdot (b \times c) = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot [i(b_2 c_3 - b_3 c_2) - j(b_1 c_3 - b_3 c_1) + k(b_1 c_2 - b_2 c_1)]
$$

$$
= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
$$

a, b, c என்ற மூன்று இணையற்ற வெக்டர்கள் ஒரு தளத்தில் இருந்தால், இவைகளால் அமையப்பெறும் இணைகரத் திண்மத்தின் பரப்பு சுன்னமாகும்.

எனவே மூன்று வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் இருப்பதற்கான நிபந்தனை $a \cdot (b \times c) = 0$ அதாவது $[abc] = 0$.

மாதிரி 1: $a-2b+3c$, $-2a+3b-4c$, $-b+2c$ என்ற மூன்று வெக்டர்களும் ஒரே தளத்தில் உள்ளன என நிரூபி.

$$(a-2b+3c) \cdot \{(-2a+3b-4c) \times (-b+2c)\}$$
$$= (a-2b+3c)\,[2a \times b - 4a \times c + 6b \times c + 4c \times b]$$
$$= (a-2b+3c)\,[2a \times b - 4a \times c + 2b \times c]$$
$$= 2a \cdot (a \times b) - 4a \cdot (a \times c) + 2a \cdot (b \times c) - 4b \cdot (a \times b) + 8b \cdot (a \times c)$$
$$- 4b \cdot (b \times c) + 6c \cdot (a \times b) - 12c \cdot (a \times c) + 6c \cdot (b \times c)$$
$$= 2a \cdot (b \times c) + 8b \cdot (a \times c) + 6c \cdot (a \times b)$$
$$\because [aab] = [aac] = [bab] = [bbc] = 0 \quad [cac] = 0$$
$$= 2a \cdot (b \times c) + 8(a \times c) \cdot b + 6(a \times b) \cdot c$$
$$= 2a \cdot (b \times c) - 8a \cdot (b \times c) + 6a \cdot (b \times c) = 0$$

கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்களின் எண்ணி முப்பெருக்கி சுன்னமாதலால், வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் அமைந்த வெக்டர்களாகும்.

மாதிரி 2: நான்முகத் திண்மத்தின் கன அளவு (Volume of a tetrahedron).

$ABCD$ ஒரு நான்முகத் திண்மமானால், O-வை மூலப் புள்ளியாகக் கொண்டு உச்சிகள் A, B, C, D-ன் நிலைவெக்டர்கள் a, b, c, d எனக் கொள்வோம்.

$$\text{முக்கோணம் } BCD\text{ன் பரப்பு} = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(c-b) \times (d-b)$$

$$\text{நான்முகத் திண்மத்தின் கனஅளவு} = \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{\Delta BCD}$$
$$= \tfrac{1}{6}\,(a-b) \cdot \{(c-b) \times (d-b)\}$$
$$= \tfrac{1}{6}\,(a-b) \cdot \{c \times d - c \times b - b \times d + b \times b\}$$
$$= \tfrac{1}{6}\,\{[acd] - [acb] - [abd) - [bcd]\} \quad \{\because b \times c = 0,\ [bcb] = [bbd] = 0\}$$
$$= \tfrac{1}{6}\,\{[abc] - [abd] + [acd] - [bcd]\}$$

துணைமுடிவு

(i) $\therefore$ நான்முகத் திண்மம் $OABC$யின் கன அளவு
$$= \tfrac{1}{6}\,[abc]$$

(ii) நிலை வெக்டர்கள் a, b, c, d உள்ள நான்கு புள்ளிகள் ஒருதளப் புள்ளிகளானால்
$$[abc] - [abd] + [acd] - [bcd] = 0.$$

3. வெக்டர் முப்பெருக்கி (Vector triple product).

a என்ற வெக்டர், $b\times c$ என்ற வெக்டர்களின் வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கியை P என்ற வெக்டரால் குறிப்பிடுவோம்.

எனவே $P = a\times(b\times c)$

P எனும் வெக்டர் a, $b\times c$ என்ற வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தாய் இருக்கும். ஆனால் $b\times c$ என்ற வெக்டர் b, c என்ற வெக்டர்கள் அமைந்த தளத்திற்குச் செங்குத்தாய் உள்ளது. எனவே P எனும் வெக்டர் b, c அமைந்த தளத்திலேயே அமைந்திருக்கும். அதாவது P, b, c என்ற மூன்று வெக்டர்களும் ஒரே தளத்தில் அமையும்.

எனவே $P = lb+mc$. எனக் குறிக்கலாம். l, m மெய்யெண் களாகும்.

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

$$a = a_1i+a_2j+a_3k$$

$$b = b_1i+b_2j+b_3k$$

$$c = c_1i+c_2j+c_3k$$

$$b\times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= i(b_2c_3-b_3c_2)-j(b_1c_3-b_3c_1)+k(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$a\times(b\times c) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = &\{a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)\}i \\ &+\{a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1\}j \\ &+\{a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)\}k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = &\,ib_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-ic_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \\ &+jb_2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-jc_2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_5) \\ &+kb_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-kc_3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = &\,(ib_1+jb_2+kb_3)(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) \\ &-(c_1i+c_2j+c_3k)(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \end{aligned}$$

$$= b(a\cdot c)-c(a\cdot b)$$

மாதிரி 3: $a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$ நிரூபி.

(இங்கு a, b, c ஒரு தளத்தில் அமையாத மூன்று வெக்டர்கள்)

$$a\times(b\times c) = b(a\,.\,c)-c(a\,.\,b)$$
$$b\times(c\times a) = c(b\,.\,a)-a(b\,.\,c)$$
$$c\times(a\times b) = a(c\,.\,b)-b(c\,.\,a)$$

மூன்றையும் கூட்ட

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b) = 0$$

மாதிரி 4: $a = 4i-8j+k$

$b = 2i+j-2k$

$c = 3i-4j+12k$ எனின்

$a\times(b\times c)$-ன் மதிப்பு என்ன?

$$a\times(b\times c) = b(a\,.\,c)-c(a\,.\,b)$$
$$a\,.\,c = (4i-8j+k)\,.\,(3i-4j+12k)$$
$$= 12+32+12$$
$$= 56$$
$$a\,.\,b = (4i-8j+k)\,.\,(2i+j-2k)$$
$$= 8-8-2$$
$$= -2$$
$$(a\,.\,c)b = 56(2i+j-2k)$$
$$= 112i+56j-112k$$
$$(a\,.\,b)c = -2(3i-4j+12k)$$
$$= -6i+8j-24k$$
$$\therefore\ (a\,.\,c)b-(a\,.\,b)c = 118i+48j-88k$$

எனவே $a\times(b\times c) = 118i+48j-88k$

4. நான்கு வெக்டர்களின் எண்ணிப் பெருக்கி

$$(a\times b)\,.\,(c\times d) = a\,.\,b\times(c\times d)$$
$$= a\,.\,[(b\,.\,d)c-(b\,.\,c)d]$$
$$= (a\,.\,c)(b\,.\,d)-(a\,.\,d)(b\,.\,c)$$
$$= \begin{vmatrix} a\,.\,c & a\,.\,d \\ b\,.\,c & b\,.\,d \end{vmatrix}$$

5. நான்கு வெக்டர்களின் குறுக்குப் பெருக்கி

$(a\times b)\times(c\times d)$ என்பது $(a\times b)$, $(c\times d)$ என்ற இரு வெக்டர்களின் குறுக்குப் பெருக்கியாகும். இவ்வெக்டர் $a\times b$ என்ற வெக்டருக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. எனவே இது a, b என்ற வெக்டர்கள் அமைந்துள்ள தளத்தில் உள்ளது. மேலும் இவ்வெக்டர் $c\times d$ என்ற வெக்ட

ருக்குச் செங்குத்தாய் உள்ளது. எனவே இது c, d என்ற வெக்டர்கள் அமைந்துள்ள தளத்தில் உள்ளது. ஆகவே $(a\times b)\times(c\times d)$ என்ற வெக்டர் a, b என்ற வெக்டர்கள் அமைந்த தளத்திற்கு இணையாக உள்ள தளமும் c, d என்ற வெக்டர்கள் அமைந்த தளத்திற்கு இணையாக உள்ள தளமும் வெட்டும் கோட்டிற்கு இணையாக உள்ளது.

$$\begin{aligned}(a\times b)\times(c\times d) &= p\times(c\times d) \quad (p=a\times b \text{ எனக் கொள்க})\\ &= (p\,.\,d)c-(p\,.\,c)d\\ &= \{(a\times b)\,.\,d\}c-\{(a\times b)\,.\,c\}d\\ &= [abd]c-[abc]d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a\times b)\times(c\times d) &= (a\times b)\times q \quad (q=c\times d \text{ எனக் கொள்க})\\ &= (a\,.\,q)b-(b\,.\,q)a\\ &= \{a\,.\,(c\times d)\}b-\{b\,.\,(c\times d)\}a\\ &= [acd]b-[bcd]a\end{aligned}$$

$$\therefore\ [abd]c-[abc]d = [acd]b-[bcd]a$$

$$[bcd]a-[acd]b+[abd]c-[abc]d = 0$$

$d = r$ எனில்

$$[bcr]a-[acr]b+[abr]c-[abc]r = 0$$

$$\therefore\ r = \frac{[rbc]a+[rca]b+[rab]c}{[abc]} \qquad \{[abc]\neq 0\}$$

$[abc]\neq 0$ ஆனால் எந்த ஒரு வெக்டர் **r**ஐயும் a, b, c வெக்டர்கள் மூலம் கொடுக்கலாம்.

மாதிரி 5: நிரூபி: $[abc]^2 = \begin{vmatrix} a\,.\,a & a\,.\,b & a\,.\,c\\ b\,.\,a & b\,.\,b & b\,.\,c\\ c\,.\,a & c\,.\,b & c\,.\,c\end{vmatrix}$

$$(a\times b)^2 = a^2b^2-(a\,.\,b)^2$$

$$\begin{aligned}\therefore\ [(a\times b)\times c]^2 &= (a\times b)^2c^2-\{(a\times b)\,.\,c\}^2\\ &= \{a^2b^2-(a\,.\,b)^2\}c^2-[abc]^2\\ &= a^2b^2c^2-(a\,.\,b)^2c^2-[abc]^2 \ldots\ldots(1)\end{aligned}$$

ஆனால் $(a\times b)\times c = (a\,.\,c)b-(b\,.\,c)a$

$$\{(a\times b)\times c\}^2 = (a\,.\,c)^2b^2-2(a\,.\,c)(b\,.\,c)(a\,.\,b)+(b\,.\,c)^2a^2 \ldots(2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் சமன்படுத்தினால்

$$\begin{aligned}&(a\,.\,c)^2b^2-2(a\,.\,c)(b\,.\,c)(a\,.\,b)+(b\,.\,c)^2a^2\\ &\quad = a^2b^2c^2-(a\,.\,b)^2c^2-[abc]^2\end{aligned}$$

$$[abc]^2 = a^2b^2c^2-(b\,.\,c)^2a^2-(c\,.\,a)b^2-(a\,.\,b)^2c^2$$
$$+2(b\,.\,c)(c\,.\,a)(a\,.\,b)$$
$$= \begin{vmatrix} a\,.\,a & a\,.\,b & a\,.\,c \\ b\,.\,a & b\,.\,b & b\,.\,c \\ c\,.\,a & c\,.\,b & c\,.\,c \end{vmatrix}$$

மாதிரி 6: $[abc][pqr] = \begin{vmatrix} a\,.\,p & a\,.\,q & a\,.\,r \\ b\,.\,p & b\,.\,q & b\,.\,r \\ c\,.\,p & c\,.\,q & c\,.\,r \end{vmatrix}$

$$a = a_1i+a_2j+a_3k$$
$$b = b_1i+b_2j+b_3k$$
$$c = c_1i+c_2j+c_3k$$
$$p = p_1i+p_2j+p_3k$$
$$q = q_1i+q_2j+q_3k$$
$$r = r_1i+r_2j+r_3k$$ ஆனால்

$$[abc] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad [pqr] = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ [abc]\,[pqr] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3 & a_1q_1+a_2q_2+a_3q_3+a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3 \\ b_1p_1+b_2p_2+b_3p_3 & b_1q_1+b_2q_2+b_3q_3 & b_1r_1+b_2r_2+b_3r_3 \\ c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3 & c_1q_1+c_2q_2+c_3q_3 & c_1r_1+c_2r_2+c_3r_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\,.\,p & a\,.\,q & a\,.\,r \\ b\,.\,p & b\,.\,q & b\,.\,r \\ c\,.\,p & c\,.\,q & c\,.\,r \end{vmatrix}$$

மாதிரி 7: நிரூபி:

$$(a\times b)\cdot(c\times d)+(b\times c)\cdot(a\times d)+(c\times a)\,.\,(b\times d) = 0$$

$$(a\times b)\cdot(c\times d) = \begin{vmatrix} a\cdot c & a\cdot d \\ b\cdot c & b\cdot d \end{vmatrix} = (a\cdot c)\,(b\cdot d)-(b\cdot c)\,(a\cdot d)$$

$$(b\times c)\cdot(a\times d) = \begin{vmatrix} b\cdot a & b\cdot d \\ c\cdot a & c\cdot d \end{vmatrix} = (b\cdot a)\,(c\cdot d)-(b\cdot d)\,(c\cdot a)$$

$$(c\times a)\,(b\times d) = \begin{vmatrix} c\cdot b & c\cdot d \\ a\cdot b & a\cdot d \end{vmatrix} = (c\cdot b)\,(a\cdot d)-(c\cdot d)\,(a\cdot b)$$

$$\therefore\ (a\times b)\cdot(c\times d)+(b\times c)\cdot(a\times d)+(c\times a)\cdot(b\times d) = 0$$

மாதிரி 8 : நிரூபி : $[a\times b,\ b\times c,\ c\times a] = [abc]^2$

$$\begin{aligned}[a\times b,\ b\times c,\ c\times a] &= [(a\times b)-(b\times c)]\cdot(c\times a)\\ &= \{[abc]b-[abb]c\}\cdot(c\times a)\\ &= [abc]b\cdot(c\times a)\quad \{\because [abb]=0\}\\ &= [abc]\,[a\times b\cdot c]\\ &= [abc]^2\end{aligned}$$

மாதிரி 9 : பின்வரும் வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் உள்ளன என நிரூபி :

$$a = -i+4j-3k$$
$$b = 3i+2j-3k$$
$$c = -3i+8j-5k.$$

$$[abc] = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -3\\ 3 & 2 & -5\\ -3 & 8 & -5\end{vmatrix}$$

$$= -1(-10+40)-4\,(-15-15)-3\,(24+6)$$
$$= -30+120-90$$
$$= 0$$

$[abc] = 0.$ எனவே $a,\ b,\ c$ வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் அமைந்துள்ளன.

பயிற்சிகள் 22

1. $a=3i+2j-4k,\ b=5i-3j+6k,\ c=5i-j+2k\ d=+3j-4k$ ஆனால்,
பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க :
(i) $(a\times b)\times c$ (ii) $(a\times b)\times(c\times d)$ (iii) $(b+c)\cdot a.$

2. $i\times(a\times i)+j\times(a\times j)+k\times(a\times k) = 2a$ எனக் காண்பி.

3. ஒரு நான்முகதின்மத்தின் முனைகள் $O(0, 0, 0)$, $A(1, -1, 1)$, $B(2, 1, 2)$, $C(-1, 2, -1)$. இதன் கன பரிமாணத்தைக் (volume) காண்க.
விடை : $\frac{4}{3}$ cubic units

4. $4i+5j+k,\ -j-k,\ 3i+9j+4k,\ -4i+4j+4k$ வெக்டர்களை நிலை வெக்டர்களாகக்கொண்ட நான்கு புள்ளிகள் ஒரே தளத்தில் அமைந்துள்ளன என நிரூபி.

5. $a=i-j-6k,\ b=i-3j+4k,\ c=2i-5j+3k$ எனில் $[abc]$-ன் மதிப்பு என்ன ?

6. $5i+6j+7k$, $7i-8j+9k$, $3i+20j+5k$ வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் உள்ளன என நிரூபி.

7. $2i+j-2k$, $i+j+3k$, $ai+j$ வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் இருந்தால் a-ன் மதிப்பு என்ன?

8. $a\times\{b\times(c\times d)\} = (b\cdot d)(a\times c)-(b\cdot c)(a\times d)$ – நிரூபி.

9. நிரூபி : $[abc](d\times e) = \begin{vmatrix} a\cdot d & a\cdot e & a \\ b\cdot d & b\cdot e & b \\ c\cdot d & c\cdot e & c \end{vmatrix}$.

10. பின்வரும் புள்ளிகள் ஒருதளப்புள்ளிகள் என நிரூபி.

(i) $3i+2j-5k$, $-3i+8j-5k$, $-3i+2j+k$, $-i+4j-3k$

(ii) $-a+4b-3c$, $3a+2b-5c$, $-3a+8b-5c$, $-3a+2b+c$.

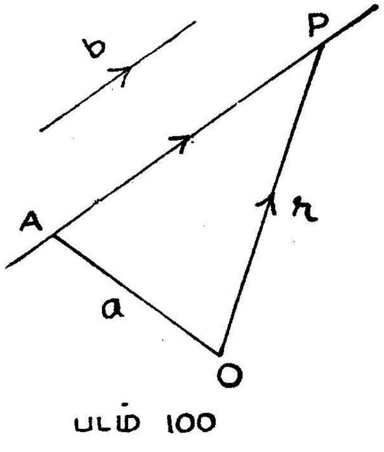
11. $[a+b, b+c, c+a] = 2[abc]$ என நிறுவுக.

12. நிரூபி : $(b\times c)\times(a\times d)+(c\times a)\times(b\times d)+(a\times b)\times(c\times d) = -2[abc]d$.

21. வெக்டர் சமன்பாடுகள்
(Vector Equations)

1. நேர்கோடு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள A என்ற ஒரு புள்ளி வழியாகவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள b என்ற வெக்டருக்கு இணையாகவும் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு.



படம் 100

O என்ற ஆதியைச் சார்ந்து A என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் a எனக் கொள்வோம். A வழிச்செல்லும் கோட்டின்மீது P என ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கவும்.

$\overrightarrow{OA} = a$. $\overrightarrow{AP}$ என்ற வெக்டர் bக்கு இணையாக உள்ளது.

எனவே $\overrightarrow{AP} = tb$ (t ஒரு மெய்யெண்)

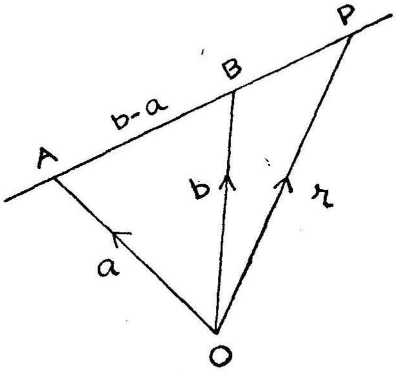
$\overrightarrow{OP} = r$ எனில் $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$

$$r = a + tb.$$

எனவே கோட்டின் சமன்பாடு $r = a + tb$.

2. A, B புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் a, b எனக் கொண்டால்

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{PA}$$
$$= b - a$$



படம் 101

எனவே A, B புள்ளிகளின் வழிச்செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$r = a + t\,(b - a)$$
$$= (1 - t)\,a + tb$$

3. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு.

$P(x, y, z)$ எனும் ஒரு புள்ளியை AB என்ற கோட்டின்மீது குறிக்கவும்.

A, B, P புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $x_1 i + y_1 j + z_1 k$; $x_2 i + y_2 j + z_2 k$; $xi + yj + zk$

எனவே AB-யின் சமன்பாடு

$$r = (1 - t)\,(x_1 i + y_1 j + z_1 k) + t\,(x_2 i + y_2 j + z_2 k)$$

t ஒரு மாறி. P எனும் புள்ளி இக்கோட்டின் மீதுள்ளதால்

$$xi+yj+zk = (1-t)(x_1i+y_1j+z_1k)+t(x_2i+y_2j+z_2k)$$

i, j, k இவைகளினுடைய கெழுவை இருபுறமும் சமன்படுத்த

$$x = (1-t)x_1+tx_2$$
$$y = (1-t)y_1+ty_2$$
$$z = (1-t)z_1+tz_2$$

(அ - து.) $x-x_1 = t(x_2-x_1)$

$$y-y_1 = t(y_2-y_1)$$
$$z-z_1 = t(z_2-z_1)$$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} = t$

4. a, b, c வெக்டர்களை நிலைவெக்டர்களாகக் கொண்ட மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைய நிபந்தனை.

l, m, n என்ற எண்களை $la+mb+nc=0$ $l+m+n=0$ என்றிருக்குமாறு எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\because\ n\neq 0 \quad \therefore\ l+m=-n\neq 0$$
$$la+mb=-nc$$
$$\frac{la+mb}{l+m} = \frac{-n}{l+m}c = c$$

எனவே c எனும் வெக்டர் A, B புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை $l:m$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் ஆகும். ஆகவே A, B, C புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைந்துள்ளது.

A, B என்ற புள்ளிகளின் வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $r = (1-t)a+tb$. இது c புள்ளிவழிச் சென்றால் $c = (1-t)a+tb$.

அதாவது $(1-t)a+tb-c=0$

கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை $(1-t)+t-1=0$.

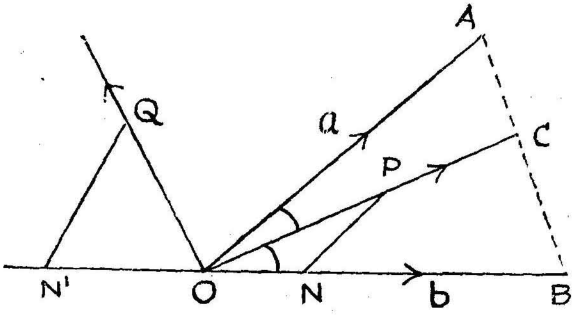
எனவே வேண்டிய நிபந்தனை $la+mb+nc=0$

இங்கு $l+m+n=0$.

5. கோண சமவெட்டிகள்: இரு கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணத்தின் சமவெட்டிகள்.

OA, OB திசைகளில் அலகு வெக்டர்கள் a, b என வை.

OP கோணம் AOB-ன் உள்சமவெட்டி.



படம் 102

P-யிலிருந்து AO-க்கு இணையாக வரையும் PN என்ற கோடு OB-ஐ N-ல் சந்திக்கிறது. எனவே $ON = PN$.

ஆகவே $\overrightarrow{NP} = ta$

$ON = tb$ (t ஒரு மெய் எண்)

P-யினுடைய நிலைவெக்டர் r எனில்

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$$

$$r = t\,(b+a)$$

இதுவே கோண உட்சமவெட்டியின் வெக்டர் சமன்பாடு.

மேலும் OD என்ற வெளிச் சமவெட்டியின்மேல் Q எனும் புள்ளியை எடுத்து AO-க்கு இணையாக QN' வரையவும். இது OB'-ஐ N'-ல் சந்திக்கிறது.

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{N'Q}$$

$$= -sb + sa$$

$$r = s\,(a-b)$$

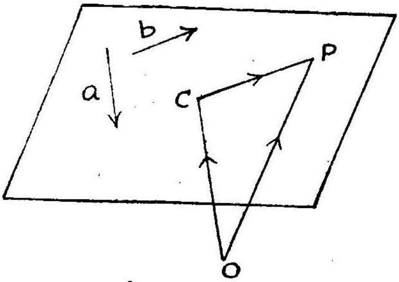
எனவே கோணத்தின் வெளிச் சமவெட்டி

$r = s\,(a-b)$. (s ஒரு மெய்யெண்).

6. தளம் (Plane)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழியே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு கோடுகளுக்கு இணையாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி C எனவும் கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகளுக்கு இணையாகச் செல்லும் வெக்டர்கள் a, b எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.



படம் 103

C புள்ளியின் நிலைவெக்டர் c எனக் கொள்க.

O - மூலப்புள்ளி.

P - தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி.

P-யின் நிலைவெக்டர் r எனக் கொள்வோம்.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$$

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = \mathbf{c} - \mathbf{r}$$

$\mathbf{c}-\mathbf{r}$, a, b என்ற மூன்று வெக்டர்களும் ஒரே தளத்தில் உள்ளது.

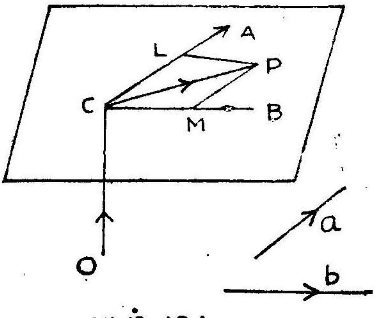
எனவே $(\mathbf{c}-\mathbf{r}) \cdot a \times b = 0$

$$\mathbf{c} \cdot (a \times b) = \mathbf{r} \cdot (a \times b)$$

எனவே தளத்தின் சமன்பாடு

$$[rab] = [cab]$$

வேறு முறை (Aliter)



படம் 104

O - மூலப்புள்ளி.

C-யின் நிலைவெக்டர் c.

கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் a, b.

P - தளத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி.

P-யின் நிலைவெக்டர் r எனக் கொள்வோம்.

வெக்டர் a, b-களுக்கு இணையாகத் தளத்திலுள்ள கோடுகள் CA, CB ஆகும்.

CA, CB-க்கு இணையாக PM, PL வரைக.

$$\therefore \quad \overrightarrow{CM} = sb$$

$$CL = ta$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$$

$$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CL}$$

$$= c + sb + ta$$

s, t என்பவை மெய்யெண்கள்.

எனவே தளத்தின் சமன்பாடு

$$\boldsymbol{r = c + ta + sb}.$$

7. மூலப்புள்ளி வழியாகவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு கோடுகளுக்கு இணையாகவும் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு.

இத்தளம் மூலப்புள்ளி அதாவது ஆதிவழிச் செல்வதால்

$$\overrightarrow{OC} = 0 \qquad \therefore \quad c = 0.$$

மேலே குறிப்பிட்ட சமன்பாடு $r = c + ta + sb$-லிருந்து இத்தளத்தின் சமன்பாடு $r = ta + sb$ ஆகும்.

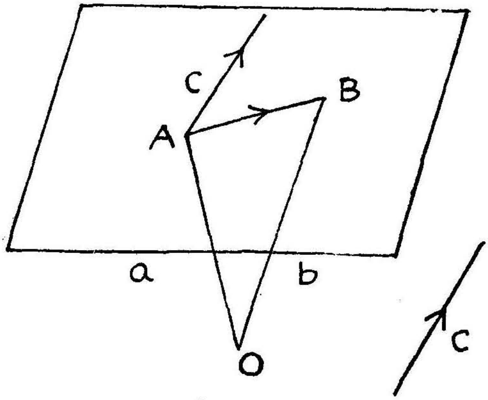
8. கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் வழியாகவும் கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு இணையாகவும் செல்லும் தளம்.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A, B எனக் கொள்வோம்.

A, B புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் a, b எனவும் கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு இணையாகவுள்ள வெக்டர் c எனவும் கொள்வோம். இக்கோடு A வழிச் செல்வதாகக் கொள்வோம்.

$$\overrightarrow{OA} = a, \quad \overrightarrow{OB} = b$$

$$\overrightarrow{AB} = b - a$$



படம் 105

இத்தளம் A புள்ளி வழியாகவும் $b-a$, c-களுக்கு இணையாகவும் செல்கிறது.

ஆகவே தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} r &= a+s(b-a)+tc \\ &= a(1-s)+sb+tc \\ &= (1-s)a+sb+tc \end{aligned}$$

9. **A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு.**

A, B, C புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே a, b, c எனக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC} \\ &= a-c \\ \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC} \\ &= b-c \end{aligned}$$

A, B, C புள்ளிகள் நிர்ணயிக்கும் தளத்தில் P ஏதேனும் ஒரு புள்ளியானால், P புள்ளியின் நிலை வெக்டர் r எனக் கொள்வோம்.

இத்தளம் c புள்ளி வழியாகவும் $a-c$, $b-c$-க்கு இணையாகவும் செல்வதால் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} r &= c+s(a-c)+t(b-c) \\ &= (1-s-t)c+sa+tb \\ &= sa+tb+uc \end{aligned}$$

இங்கு $s+t+u=1$

பயிற்சிகள் 23

1. நிலை வெக்டர் $2i+3j-k$ உடைய புள்ளி வழியாகவும் $-3i+4j+2k$ என்ற வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகவும் செல்லும் தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு காண்க.

விடை : $\begin{cases} 3x-4y-2z+4=0 \\ r.(3i-4j-2k)+4=0 \end{cases}$

2. $A(3i-4j-2k)$ புள்ளி வழி வெக்டர் $9i+6j+2k$க்கு இணையாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x-3}{9}=\frac{y+4}{6}=\frac{z+2}{2}$ எனக் காண்பி.

3. நிலை வெக்டர் $3a-2b$ உள்ள புள்ளி, நிலை வெக்டர் a, b உடைய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் அமைந்துள்ளது என நிறுவுக.

4. $r=(a-b-10c)+t(2a-3b+8c)$, $r=(4a-3b-c)+s(a-4b+7c)$ கோடுகள் ஒரு தளக் கோடுகள் (coplanar lines) எனக் காண்பி.

5. $(i-2j-k)$, $(2i+3j+k)$ புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு, $(2i+j-3k)$, $(4i-j+2k)$, $(3i+j)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தை $\frac{20}{7}i+\frac{51}{7}j+\frac{19}{7}k$ புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

6. $(-a+4b-3c)$, $(3a+2b-5c)$, $(-3a+8b-5c)$, $(-3a+2b+c)$ புள்ளிகள் ஒரு தளப் புள்ளிகள் எனக் காண்பி.

7. $-2a+3b+5c$, $7a-c$, $a+2b+3c$ புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமைந்த புள்ளிகள் என நிரூபி.

8. நிலை வெக்டர்கள் $a=2i-j-k$, $b=-i+3j-k$யின் நுனிப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு $x-y$ தளத்திற்கு இணை என நிரூபி.

9. நிலை வெக்டர் $3i-5j+2k$ உடைய புள்ளி வழியாகவும், $5i+2j-7k$ என்ற வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகவும் செல்லும் தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு காண்க. விடை : $r.(5i+2j-7k)+9=0$

10. $r=2a+3b+tc$ என்ற கோடு $r=a-b+p(a+b-c)+q(a+c-b)$ தளத்தை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

விடை : $2a+3b-4c$

11. ஆயங்களில் a, b, c என்ற வெட்டுத் துண்டுகள் ஏற்படுத்தும் தளத்தின் சமன்பாட்டை வெக்டர் முறையில் காண்க.

விடை : $r.\left(\frac{i}{a}+\frac{j}{b}+\frac{k}{c}\right)=$

12. $r=a+tc$, $r=b+pc$ என்ற இணைகோடுகள் அமைந்த தளத்தின் சமன்பாடு யாது? விடை : $(r-a).(a-b)\times c=0$

13. (2, 2, 1), (2, 3, 2), (−1, 3, 0) புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு காண்க. விடை : $r.(2i+3j-3k)-7=0$

14. (1, 0, 1), (3, 2, 0), (4, 4, 1), (2, 2, 2) என்ற நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே தளத்தில் உள்ளன என நிரூபி.

15. நிலை வெக்டர் c உடைய புள்ளி வழியாகவும் $r.a=0$ தளத்திற்கு இணையாகவும், $r=a'+tb$ என்ற கோட்டை வெட்டிக்கொண்டு செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

விடை : $r=c+ta\times[b\times(c-a')]$

கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், சென்னை.

1970 ஜனவரிவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்				ரூ.	பை.
*1.	பொருளாதாரம்–I	...	சி. வேலாயுதம்	... 6	50
*1-A.	,, II	...	,,	... 9	00
*2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	...	டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	... 4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	...	,,	... 4	50
*4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	...	சோணாசலம்	... 7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	...	மு. ஆரோக்கியசாமி	... 6	00
6.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	...	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	... 12	00
7.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்–I	...	தி. சி. மோகன்	... 12	00
8.	,, ,, II	...	எம். ஏ. ஆபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	... 10	75
9.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	...	க. முத்தையன்	... 7	00
10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I	...	சி. வேலாயுதம்	... 6	75
*11.	,, II	...	,,	... 11	50
*12.	நவீன பாங்கு இயல்	...	க. வெற்றிவேல்	... 7	50
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	...	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	... 5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	...	அர. சேஷாசலம்	... 4	75
15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	...	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	... 10	00

* மூலநூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

No.	Title	Author	ரூ.	பை.
16.	இந்தியப் பொருளியல்—II	எம். லூர்துநாதன்	4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, ,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, ,, II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, ,, II	பி. வி. சீனிவாசன்	6	00
24.	,, ,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, ,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, ,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடையபிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	சு. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, ,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
35.	பன்ருட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	,, ,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00
37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, ,, II	,,	7	00

39.	வளர்ச்சியுருத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
41.	1939முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857–1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6	25

வரலாறு

*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4	50
*46.	,, ,, II	,,	3	50
*47.	,, ,, III	,,	7	25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I	டி. வி. சொக்கப்பா	4	50
49.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டுகாலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	15	00
50.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணுமலை	13	00
51.	,, ,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
52.	,, ,, III	என். ஜே. ராஜகோபால்	8	00
53.	,, ,, IV	,,	8	00
54.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15	00
55.	,, ,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8	00
56.	,, ,, III	,,	5	00

* (Original Book)

			ரூ.	பை.
வரலாறு—(தொடர்ச்சி)				
57.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	7	50
58.	,, ,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	9	00
59.	,, ,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	11	00
60.	கிரேக்கநாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஜி. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
61.	,, ,, II	,,	7	00
62.	,, ,, III	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
63.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
64.	,, ,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
65.	,, ,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
66.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
67.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
68.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
69.	,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணுமலை	6	75
70.	,, III	இரா. அண்ணுமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
71.	,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
72.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
73.	,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
74.	,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
75.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	பா. மாணிக்கவேலு	5	00
76.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00
அரசியல்				
*77.	அரசியல் அமைப்புகள்	ஜே. இராமச்சந்திரன்	4	62
78.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	7	50

79.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
80.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
81.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
82.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
83.	„ „ II	„	13	25
84.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
85.	„ „ II	இ. ஜெகதீசன்	7	25
86.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
87.	„ „ II	டி. செல்லப்பா	7	50
88.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
89.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
90.	„ „ II	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	5	75
91.	„ „ III	கி. ர. அனுமந்தன்		
*92.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
93.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
94.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	7	00
95.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
96.	„ „ II	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
97.	„ „ III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

* மூலநூல் (Original Book)

			ரூ.	பை.
உளவியல்				
98.	குழந்தை உளவியல்—I	... கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	... 8	00
99.	,, ,, II	... ,,	... 7	00
100.	உட்கவர் மனம்	... சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	... 7	00
101.	இளையோர் உளவியல்—I	... தி. இரா. அரங்கராசன்	... 12	00
102.	,, ,, II	... ,,	... 9	00
103.	சமூக உளவியல்	... என். வேதமணி மானுவேல்	... 9	25
104.	பிறழ்நிலை உளவியல்	... அ. பெசென்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	... 11	00
105.	பித்தரின் உள்ளம்	... ,,	... 3	00
*106.	குமர உள்ளம்	... டாக்டர் மு. அறம்	... 6	25
தத்துவம்				
107.	இந்து சமயத் தத்துவம்.	... ஞா. ராஜாபகதூர்	... 5	50
*108.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	... ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	... 3	50
*109.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	... ஆர். எஸ். தேசிகன்	... 3	50
110.	அத்துவித தத்துவம்	... கோ. மோ. காந்தி	... 6	50
111.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	... மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	... 5	50
112.	இந்தியத் தத்துவம்—I	... வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முகசுந்தரம்	... 3	50
113.	,, II	... ,,	... 6	00
114.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	... சி. இராமலிங்கம்	... 6	00
அறவியல்				
115.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	கோ. மோ. காந்தி	... 8	50
அளவையியல்				
116.	அளவையியல்—தொடக்க நூல்	... கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	... 2	50

மானிடவியல்

*117.	மானிடவியல்	...	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	... 4	75
118.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	...	கி. பூ. சுப்பிரமணியம்	... 5	50
119.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	...	எஸ். இலட்சுமி	... 3	50

சமூகவியல்

120.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	...	ஜே. நாராயணன்	... 10	50

புவியியல்

121.	ஆசியா—I	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	... 9	50
122.	,, II	...	,,	... 8	75
123.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	...	ஏ. எஸ். நாராயணன்	... 8	50
*124.	தென்கிழக்கு ஆசியா	...	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	... 8	50
*125.	வட அமெரிக்கா	...	குமாரி இரா. அலமேலு	... 8	25
*126.	தென் அமெரிக்கா	...	எம். என். பத்மநாபன்	... 9	00
*127.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	...	திருமதி எச். நியூமன்	... 4	00
*128.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	...	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	... 3	25
*129.	புவிப்புறவியல்—II	...	நா. அனந்தபத்மநாபன்	... 6	00
*130.	செய்முறைப் புவியியல்	...	சு. ஜெயச்சந்திரன்	... 9	00
*131.	மக்கட் பரப்பியல்	...	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	... 6	25
*132.	சமுத்திரவியல்	...	கோ. இராமசாமி	... 6	50
133.	காலநிலை இயல்—I	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	... 10	00
134.	,, II	...	,,	... 5	00
135.	காலநிலை இயல்	...	திருமதி இராதா	... 10	00
136.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	கோ. இராமசாமி	... 11	00
*137.	புவி அமைப்பு இயல்	...	சி. விஸ்வநாதன்	... 4	75

* மூலநூல் (Original Book)

			ரூ.	பை.
புவியியல்—(தொடர்ச்சி)				
138.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	... கோ. இராமசாமி	... 6	00
139.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	... எஸ். மாணிக்கம்	... 9	50
140.	,, II	... எம். கார்த்திகேயன்	... 12	00
141.	,, III	... சி. எஸ். நரசிம்மன்	... 5	75
புள்ளியியல்				
*142.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	... சு. வைத்தியநாதன்	... 10	00
143.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	... கோ. சண்முகசுந்தரம்	... 10	00
144.	,, II	... இராஜகோபாலன்	... 14	00
145.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	... தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	... 6	50
உயர்கணிதம்				
*146.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	... டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	... 12	50
*147.	வகை நுண்கணிதம்	... ,,	... 8	00
*148.	தொகை நுண்கணிதம்	... தி. கோவிந்தராசன்	... 9	00
விலங்கியல்				
*149.	விலங்கியல்	... பெ. மா. அண்ணமலை, இரா. முருகேசன்	... 12	00
பௌதிகவியல்				
150.	ஒளி நூல்	... ச., சம்பத்து	... 10	00
விஞ்ஞானம்				
*151.	வானவெளி வெற்றி	... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்,	... 6	00
*152.	ரேடியோ	... ,, பி. திருஞானசம்பந்தம்	... 4	75
*153.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	... பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	... 4	50
*154.	பாம்புகள்	... பெ. மா. அண்ணமலை	... 3	50

*155.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8	00
*156.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4	00
*157.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6	50
மருத்துவம்				
*158.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2	50
159.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	8	25
*160.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
161.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
162.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது	6	75
163.	,, II	,,	5	50
164.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7	25
பொறியியல்				
165.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50
கூட்டுறவு				
166.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50
சட்டம்				
*167.	குற்றவியல் சட்டம்	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00
பொது நூல்கள்				
168.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25

* மூலநூல் (Original Book)

பொது நூல்கள்—(தொடர்ச்சி)			ரூ.	பை.
169.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8	00
*170.	சேமக் கை-நூல்	ஆ. சுப்பிரமணியம்	2	50
*171.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00
*172.	உணவும் ஊட்டமும்	தி. வேங்கிடகிருஷ்ணய்யங்கார்	4	50
புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை				
*173.	உலக வரலாறு	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	4	00
*174.	பொருளாதாரம்	ஜி. சிதம்பரம்	2	75
*175.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	2	50
*176.	,, ,, II	,,	2	25
*177.	பௌதிகம்	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	7	50
*178.	புகுமுக பௌதிகம்	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	5	75
*179.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	கே. ராஜகோபாலன்	7	00
*180.	,, II	,,	3	00
*181.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	7	00
*182.	,, II	,, ,,	4	50
*183.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	ஆர். மகாதேவன்	4	75
*184.	,, II	,,	3	25
*185.	வேதியியல்	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	7	00
*186.	புகுமுக வேதியியல்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	5	50
*187.	விலங்கியல்	எஸ். ஆப்ரகாம்	4	00
*188.	புகுமுக விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணமலை	7	25
*189.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	எஸ். சுந்தரம்	4	50

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (B.Sc.) நூல்கள்

				ரூ.	பை.
பௌதிகம் (Physics)					
*190.	எந்திரவியல்—சிறப்புப்பாடம் (Book I) ...	ஆர். நாகராசன்	...	6	25
*191.	வெப்பவியல்—சிறப்புப்பாடம் ...	கே. நாச்சிமுத்து	...	5	25
*192.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப்பாடம் (Book I)	டி. கமலக்கண்ணன், எஸ். கிருட்டிணசாமி	...	4	50
*193.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்-I (Book I) ...	பி. தங்கராஜன்	...	4	00
*194.	,, (Book II) ...	,,	...	3	00
*195.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப்பாடம் ...	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம்	...	4	50
*196.	மின்னியல்-காந்தவியல் (Book I) ...	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	...	4	75
*197.	ஒளியியல்—சிறப்புப்பாடம் —	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், டாக்டர் ஆர். சபேசன்	...	7	75
வேதியியல் (Chemistry)					
*198.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்-சிறப்புப்பாடம்...	டி. இராமலிங்கம்	...	2	25
*199.	பௌதிக வேதியியல் (Book I) ...	டி. சக்திவேலு	...	4	00
*200.	கனிம வேதியியல்—துணைப்பாடம் ...	சி. ஏ. பத்மநாபன்	...	6	50
*201.	கனிம வேதியியல் (Book I) ...	பி. டி. முனியப்பா	...	4	00
*202.	பொது பௌதிக வேதியியல்—துணைப்பாடம் ...	ஆர். துளசிதாஸ்	...	4	75
கணிதம் (Mathematics)					
*203.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப்பாடம் (Book I) ...	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	...	4	25
*204.	தொகுமுறை வரைகணிதம்—சிறப்புப்பாடம் ...	ஆர். மகாதேவன்	...	2	00
*205.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப்பாடம் ...	எம். எம். இராமசாமி	...	5	50
*206.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப்பாடம் ...	வி. அரங்கநாதன்	...	3	25
*207.	கணிதம்—துணைப்பாடம் ...	ஆர். அனுமந்தராவ்	...	6	00

* மூலநூல் (Original Book)

			ரூ.	பை.
கணிதம்—(தொடர்ச்சி)				
*208.	நிலையியல்—சிறப்புப்பாடம் ...	கே. இராஜகோபாலன் ...	5	00
புள்ளியியல் (Statistics)				
*209.	புள்ளியியல்—துணைப்பாடம் ...	எஸ். கருப்பையா ...	3	50
விலங்கியல் (Zoology)				
*210.	முதுகெலும்பற்றவை–I—சிறப்புப்பாடம் ...	ஆர். முருகேசன் ...	11	50
*211.	,, II—சிறப்புப்பாடம் ...	திருமதி எஸ். கே. வள்ளி ...	11	25
*212.	முதுகுநாணுள்ளவை–I—சிறப்புப்பாடம் (Book I)...	திருமதி ராணி. கந்தசுவாமி ...	8	00
*213.	,, (Book II)...	,, ...	9	75
*214.	முதுகுத்தண்டுள்ளவை–II—சிறப்புப்பாடம் ...	திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன் ...	11	75
*215.	முதுகெலும்பற்றவை—துணைப்பாடம் ...	என். இராமலிங்கம் ...	9	00
*216.	முதுகுநாணுள்ளவை—துணைப்பாடம் ...	வி. சேது ...	10	00
தாவரவியல் (Botany)				
*217.	தாவர வெளி உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும்—சிறப்புப்பாடம்...	கே. ராஜசேகரன் ...	11	00
*218.	தாவரப் புற அமைப்பியல் ...	கே. பாலச்சந்திரகணேசன் ...	9	25
*219.	தாவர உள்ளமைப்பியல் ...	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு ...	7	25

* மூலநூல் (Original Book)

கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பட்டப்படிப்பு

அறிவியல் பாட நூல்கள்—1970

1.	சூழ்நிலையியல், உடற்செயலியல்	—திரு. டி. ஆர். கிருஷ்ணன்
2.	அறிமுறை வேதியியல்	—திரு. ஓ. ஆர். சூரிய நாராயணன்
3.	பொது பௌதிகம்	—திரு. க. ப. கந்தசாமி, திரு. மு. தியாகசுந்தரம்
4.	வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்	—திரு. ஆர். மகாதேவன்
5.	தாவரச் சூழ்நிலையியல், மரபியல், உயிர்மரூஉ இயல், இயங்கியல்-துணைப்பாடம்	—டாக்டர் கு. பெரியசாமி
6.	பௌதிகம்-துணைப்பாடம்-பகுதி-2	—திரு. கா. வே. சுப்பிரமணியன்
7.	இன்றைய பௌதிகம்	—டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்
8.	ஒலி நூல்	—திரு. டி. முருகையன்
9.	கணிதம்-துணைப்பாடம்-பகுதி-2	—திரு. ஆர். அய்யாசுவாமி
10.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம்	—திரு. க. சிவசுப்ரமணியம்
11.	தாவரவியல்-துணைப்பாடம்	—திரு. பா. இராசாராம்
12.	செல்லியல்	—திரு. என். இராமலிங்கம்
13.	மரபியல்	—திரு. பெ. மா. அண்ணுமலை
14.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை	—திரு. எஸ். சுந்தரம்
15.	அங்கக வேதியியல்-துணைப் பாடம்	—திரு. பி. எல். இராமசாமி
16.	செய்முறைக் கரிம வேதியியல்	—டாக்டர் என். ஆறுமுகம்
17.	முதுகெலும்பிகளது கருவியல்	—திரு. எஸ். ஆபிரகாம்

இவை அடக்கவிலை வெளியீடுகள்—கழிவு இல்லை